

# Raum - Zeit - Materie\*

## Auf der Suche nach einer einheitlichen Theorie der fundamentalen Naturgesetze

Klaus Mecke

Institut für Theoretische Physik, Universität Erlangen-Nürnberg,  
Staudtstrasse 7, 91058 Erlangen, Germany

Ostern 2018

---

Woher ‚kommt‘ die Zeit? Warum ‚leben‘ wir in drei Dimensionen des Raumes? Was ‚ist‘ eigentlich Materie? Solche Fragen erwartet man üblicherweise von Philosophen und nicht von Naturwissenschaftlern. In der Tat setzen selbst das Standardmodell der Elementarteilchenphysik und die Allgemeine Relativitätstheorie der Kosmologie bereits Antworten voraus, indem sie postulieren, dass die Welt aus einer kontinuierlichen 4-dimensionalen Raumzeit besteht, die mit Quantenfeldern angefüllt ist. Unbeachtet sind dabei bereits eine Reihe ontologischer und epistemischer Annahmen gemacht worden, die weder empirisch belegt noch explizit in Frage gestellt sind, insbesondere, dass Materie substanzhaft und wesensfremd vom Raum als einer leeren Bühne sich mit der Zeit kausal verändert. Alternativ kann man die Welt als einen Prozess von elementaren Ereignissen auffassen, in dem uns die Anordnung der endlich vielen vergangenen Ereignisse, d. h. der punktartigen Elemente der Welt als ‚Raum‘, ‚Zeit‘ oder ‚Materie‘ erscheint.

Ein neues geometrisches Modell, das elementare Ereignisse als endliche Punktmenge beschreibt, deren Struktur sich durch Ereignisfolgen ergibt, könnte auf die grundlegenden Fragen physikalische Antworten geben. Basierend auf Unterschieden der Geometrie endlich vieler Punkte zum mathematisch komplizierteren Kontinuum von Punkten, kann mit nur wenigen Annahmen über ihren Zusammenhang argumentiert werden, dass die 4-dimensionale Raumzeit die einzig mögliche Weise ist, ein mathematisches Modell der Welt zu formulieren, die durch punktuelle Ereignisse entsteht. Materie erscheint dabei als geometrische Verzerrung und ist daher nicht von der Raumzeit zu trennen, sondern ein Teil von ihr. Alle physikalischen Eigenschaften der elementaren Materieteilchen, ihre wechselwirkende Kräfte, Massen und Ladungen, sowie ihre ungewöhnlichen Quantenphänomene folgen allein aus der geometrischen Struktur einer Welt endlich vieler Ereignispunkte. Diese Einheit von Materie, Raum und Zeit wurde bereits von Albert Einstein und Hermann Weyl im Anschluß an die Allgemeine Relativitätstheorie gesucht aber nicht gefunden, da sie vermutlich mit der Annahme eines reellen Kontinuums von Punkten nicht möglich ist.

---

\* Zum 100. Jahrestag, Ostern 1918, Hermann Weyls Buch *Raum · Zeit · Materie* [1] gewidmet.

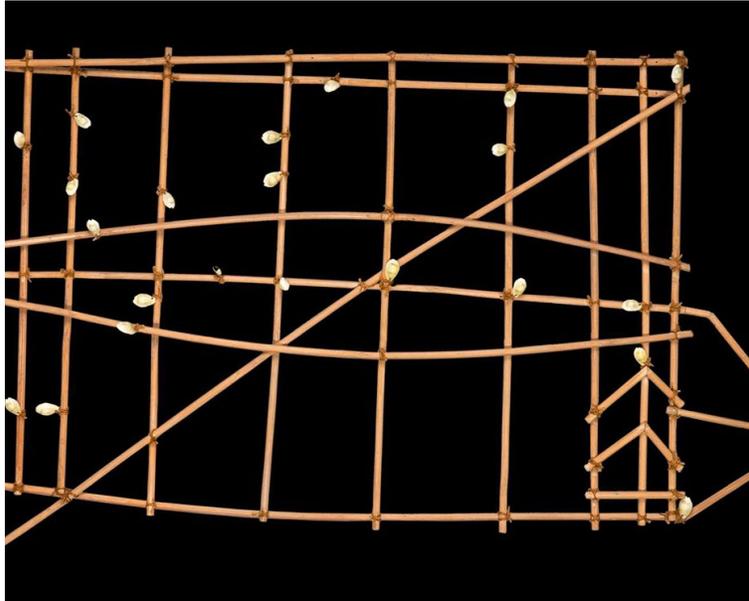


Abbildung 1: Stabkarten, wie sie zum Navigieren in der Südsee verwendet wurden, sind ein frühes Beispiel einer finiten Geometrie als Modell der Welt: sie besteht aus endlich vielen Linien (Kanurouten), die sich in Punkten (Inseln, symbolisiert durch kleine Muscheln) schneiden (Quelle: Landesmuseum Hannover, von einer James-Cook-Reise).

## Inhaltsverzeichnis

1	Auf der Suche nach geometrischer Harmonie der Welt	3
2	Geometrie und Physik	12
3	Ursprung der (3+1)-dimensionalen Welt: geometrische Eigenschaften endlich vieler Punkte	18
4	Ursprung der Materie: Vielfalt einer inhomogenen Welt	24
5	Ursprung des Raumzeitkontinuums: Nähe und Nachbarschaft	33
6	Ursprung der Quantenphänomene: Zustände in überlagernden linearen Hüllen	43
7	Ursprung der Geometrie: Prozess von Ereignissen im Raum der Möglichkeiten	54
8	Auf dem Weg zum Standardmodell der Physik	59

# 1 Auf der Suche nach geometrischer Harmonie der Welt

Da wir als Kinder auf die Welt kommen und über sinnliche Gegenstände urtheilen, bevor wir den vollen Gebrauch unserer Vernunft erlangt haben, so werden wir durch viele Vorurtheile an der Erkenntnis der Wahrheit gehindert und es scheint kein anderes Mittel dagegen zu geben, als einmal im Leben sich zu entschliessen, an Allem zu zweifeln, wo der geringste Verdacht einer Ungewissheit angetroffen wird.  
René Descartes, *Principia philosophiae*, 1644.

## Ist die Welt diskret oder kontinuierlich?

Die Welt ist unserer Wahrnehmung nach ein lückenloser *Raum* von Orten, an denen sich dichte *Materie* befindet, die sich in der *Zeit* stetig verändert. Raum, Zeit und Materie werden als völlig verschiedenartige Entitäten wahrgenommen, die *kontinuierlich* vor uns liegen, bzw. fließen oder sich ausbreiten. Spätestens mit der Erfindung des Mikroskopes haben wir aber die Erfahrung gemacht, dass die glatten Oberflächen der Dinge auf kleinen Längenskalen ganz anders aussehen und gar letztendlich aus diskreten Atomen aufgebaut sind, deren Abbilder durch ein Elektronenmikroskop wir heute alle vor Augen haben. Könnte es also sein, dass die Lückenlosigkeit, Stetigkeit und Dichtheit unserer Alltagserfahrung von Raum, Zeit und Materie eventuell nur eine Illusion unserer Sinne ist? Der Raum selber erscheint doch immer noch als kontinuierlich, bewegen sich in ihm doch selbst die Atome kontinuierlich in der Zeit. Spätestens mit der Erfindung des Films haben wir aber die Erfahrung gemacht, dass eine Abfolge von 50 diskreten Bildern in einer Sekunde als ein kontinuierliches Geschehen wahrgenommen wird. Müssen wir also nur genau und schnell genug hinschauen, um auch die scheinbare Bewegung der Atome als eine Illusion der Sinne zu erkennen, die ‚in Wahrheit‘ nur eine Abfolge von Standbildern ist?

Bereits die antiken Vorsokratiker behandelten die Frage, ob alles im Fluß ist - wie Heraklit von Ephesos behauptete - oder es Bewegung oder Veränderung gar nicht geben kann - wie Zenon und Parmenides von Elea argumentierten. Zentral ist dabei die Frage, ob die Welt in diskrete Einheiten zerlegbar ist oder alles in einer kontinuierlichen Veränderung sich befindet. Zenons Paradoxien versuchen, die Widersprüchlichkeit der Vorstellungen von der Vielfalt des Seins und der Kontinuität der Welt zu illustrieren. Dass dies kein Widerspruch sein muss, machte u. a. der Mathematiker und Philosoph Alfred North Whitehead deutlich, der in seinem Weltbild (*Process and Reality*, 1929) sich von einer Ontologie des Seienden abwendete und einen Prozess der kontinuierlichen Realisierung von diskreten Ereignissen annahm [2, 3]. Raum, Zeit und Materie als kontinuierliche Entitäten anzunehmen könnte ein „Trugschluss der unangebrachten Konkretisierung“ („fallacy of misplaced concreteness“) sein und die *Welt* könnte nur ein Geschehen von „wirklichen Ereignissen“ sein. Whitehead bedauerte, dass wir noch keine wissenschaftliche Vorstellung von den wirklichen Ereignissen und ihren Beziehungen zueinander haben, um solche Fragen beantworten zu können, Er versuchte mit seiner „Methode der extensiven Abstraktion“ eine mathematische Theorie zu entwickeln, die auch zu einem Modell einer „punktfreien Geometrie“ der Welt führte, konnte damit aber keine Phänomene der Natur erklären. Aber vielleicht ist als ein erster Schritt eine finite projektive Geometrie erfolgreicher.

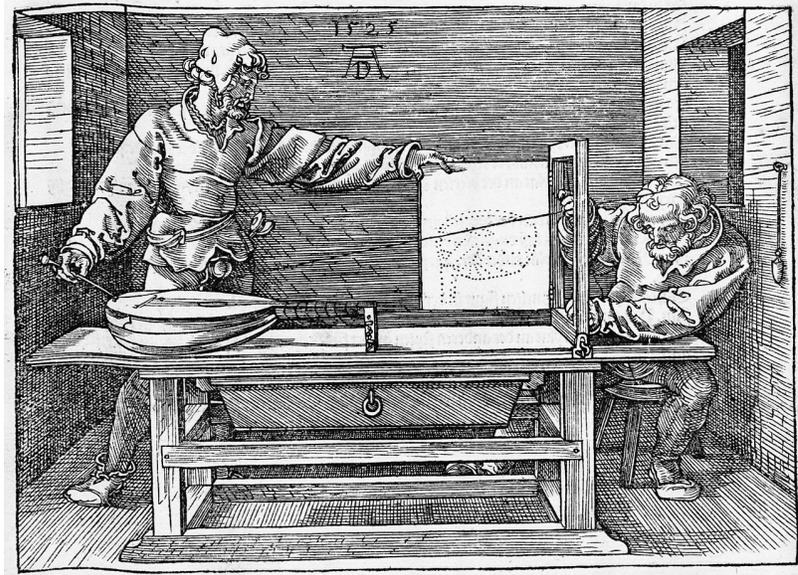
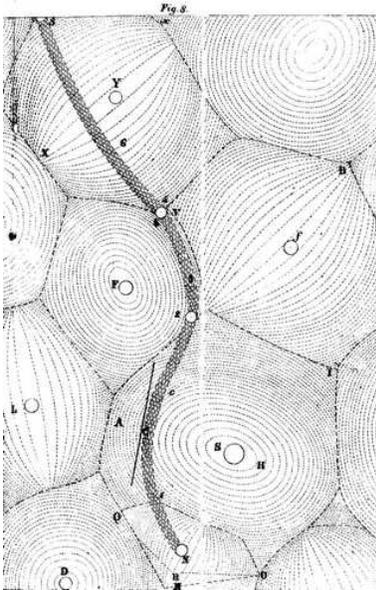


Abbildung 2: (a) Die Konzeption eines Äthers in René Descartes *Prinzipien der Philosophie. Von der sichtbaren Welt* ist ein früher Versuch Raum und Materie als Einheit zu denken. (b) Die Zentralprojektion einer Laute durch Albrecht Dürer ist ein frühes Beispiel für den Nutzen projektiver Geometrie bei der Darstellung der Welt.

## Geometrie und Physik: das Programms der Pythagoräer

Geometrie wird seit der Antike als die Wissenschaft der Beziehungen von Punkten und Geraden, von Flächen und Volumina angesehen, die physikalisch u. a. bei Karten für die Orientierung in Raum und Zeit praktisch verwendet wurden (siehe Abbildung 1). Es war wohl Anaximander von Milet, der in Europa als erster eine Karte von der Welt als eine globale Repräsentation des geometrisch geordneten ‚Kosmos‘ entwarf. Sein Schüler Pythagoras von Samos gründete dann eine ganze religiös-philosophische Schule auf dem Diktum „Alles ist Zahl“ und begründete das Wesen der Welt in der Geometrie. Aristoteles schrieb über die Pythagoräer:

Da sie erkannten, daß die Verhältnisse und Gesetze der musikalischen Harmonie auf Zahlen beruhten und da überhaupt alle anderen Dinge ihrer ganzen Natur nach den Zahlen zu gleichen schienen, die Zahlen aber die ersten Prinzipien der ganzen Natur seien, so glaubten sie, daß die Elemente der Zahlen auch die Elemente aller Dinge wären und daß die ganze Welt Harmonie und Zahl wäre.

Werner Heisenberg meinte in seinem Aufsatz *Gedanken der antiken Naturphilosophie in der modernen Physik* (1937), dass die Physik „eine konsequente Durchführung des Programms der Pythagoreer“ sei, das auf „dem Gedanken an die sinngebende Kraft mathematischer Strukturen“ beruht:

Vor allem sind es zwei Gedanken der ersten griechischen Philosophen, die noch heute den Weg der exakten Naturwissenschaft bestimmen und die daher vor allem unser Interesse beanspruchen können: die Überzeugung vom Aufbau der Materie aus kleinsten unteilbaren Einheiten, den Atomen, und der Glaube an die sinngebende Kraft mathematischer Strukturen.

So versuchte Johannes Kepler während der Kopernikanischen Revolution geometrische Modelle für den Kosmos zu finden: basierend zunächst 1596 im *Mysterium Cosmographicum* auf den fünf regelmäßigen Polyedern, die schon die Pythagoreer als Platonische Körper zu den Fundamenten der Physik erklärten, dann 1609 in der *Astronomia Nova* auf den Kegelschnitten als Grundfiguren (1. Keplersche Gesetz), womit er die ellipsenförmige Bahn der Planeten und ihre Umlaufgeschwindigkeit (2. Keplersche Gesetz), sowie 1618 mit dem 3. Keplerschen Gesetz über die Umlaufgeschwindigkeit eine neue *Harmonices mundi* entdeckte. 1686 erklärte Isaac Newton diese Bahnformen als Lösungen seines Bewegungsgesetzes (2. Newtonsche Gesetz)

$$F = ma, \quad \text{bzw. genauer } \vec{F}(\vec{r}) = m\ddot{\vec{r}} \quad (1)$$

das eine Differentialgleichung (2. Ordnung) für die Positionen einer Teilchenbahn  $\vec{r}(t) \in \mathbb{R}^3$  in einem 3-dimensionalen kontinuierlichen Raum  $\mathbb{R}^3$  ist, die mit einer Zeit-Koordinate  $t$  parameterisiert werden kann. Hergeleitet hat er dieses Naturgesetz allein über die geometrischen Verhältnisse von Bahnkurven materieller Körper. Dieser Meilenstein der Physik hob das Programm der Pythagoreer auf eine neue Ebene: die mathematisch-geometrische Begründung der Naturphänomene ist nicht an der Oberfläche der anschaulich geometrischen Formen zu suchen, sondern liegt in der Tiefe abstrakter mathematischer Strukturen von Raum, Zeit und Materie verborgen. Allerdings stellte Eugene Paul Wigner in seinem berühmten Aufsatz über die *Unreasonable Effectiveness of Mathematics in the Natural Sciences* (1960) fest:

The miracle of the appropriateness of the language of mathematics for the formulation of the laws of physics is a wonderful gift which we neither understand nor deserve.

Es überrascht nicht, dass Newtons Bewegungsgesetz (1) eng mit bestimmten mathematischen Vorstellungen über die Geometrie von Raum, Zeit und Materie verbunden ist. Sein Konzept eines absoluten, leeren und trägen Raumes entzündete mit Leibniz Widerspruch eine bis heute wirkende Debatte über die Natur des Raumes (Geometrie) und ihr Verhältnis zur Materie (Physik), die sich durch die Entdeckung von Nicht-Euklidischen Geometrien und gekrümmten Mannigfaltigkeiten grundlegend änderte. In allen diesen Debatten wurde ein Aspekt relativ wenig diskutiert: Ist der Raum ein Kontinuum oder eine Ansammlung diskreter Punkte? Zu diesem Gedanken eines endlichen Raumes stellte Hermann Weyl in seiner *Philosophie der Mathematik und Naturwissenschaft* (1927) fest:

Aber er ist bisher immer bloße Spekulation und in den ersten Anfängen stecken geblieben, hat niemals den geringsten Kontakt mit der Wirklichkeit gewonnen.

Genau dies wird mit diesem Aufsatz versucht, da die Konzeption der Welt als Menge endlich vieler Ereignispunkte einige Antworten auf die aufgeworfenen Fragen geben könnte. Eine finite projektive Geometrie ist zudem im Sinne Felix Kleins ein ‚Dach‘ mit der umfangreichsten Symmetriegruppe, unter dem sowohl Nicht-Euklidische Geometrien durch Spezifikationen als auch gekrümmte Geometrien durch Inhomogenitäten von Nachbarschaftsrelationen Platz finden. Felix Klein begann 1872 seine als *Erlanger Programm* berühmt gewordene Antrittsvorlesung *Vergleichende Betrachtungen über neuere geometrische Forschungen* an der Universität Erlangen mit der Feststellung [4]:

Unter den Leistungen der letzten fünfzig Jahre auf dem Gebiet der Geometrie nimmt die Ausbildung der *projektivistischen Geometrie* die erste Stelle ein. Wenn es anfänglich schien, als sollten die sogenannten metrischen Beziehungen ihrer Behandlung nicht zugänglich sein, da sie beim Projizieren nicht ungeändert bleiben,

so hat man in neuer Zeit gelernt, auch sie vom projektivistischen Standpunkt aufzufassen, so daß nun die projektivistische Methode die gesamte Geometrie umspannt.

Felix Klein hatte die gerade 1886 erschienene Habilitationsarbeit *Ueber die Hypothesen, welche der Geometrie zu Grunde liegen* von Bernhard Riemann [5] vor Augen. Die dort eingeführte Geometrie der Krümmung die machte fast 50 Jahre später Albert Einstein mit seiner *Allgemeine Relativitätstheorie* (ART) auch zur Grundlage des physikalischen Verständnisses der Welt [6, 7]. Bereits 1918 wies Hermann Weyl in seinem Buch über *Raum - Zeit - Materie*, darauf hin, dass es nicht notwendig ist, „der Physik eine Riemannsche Geometrie als Weltgeometrie zugrunde zu legen.“ Um auch Materie geometrisch im Rahmen der Allgemeinen Relativitätstheorie beschreiben zu können und dadurch dem „*Traum des Descartes von einer rein geometrischen Physik*“ näher zu kommen, schlug er in seinem Aufsatz *Gravitation und Elektrizität* von 1918 eine Erweiterung der Riemannschen Geometrie durch eine „*Eichsymmetrie*“ vor [8], die als ein erster Versuch einer einheitlichen Theorie der Physik gelten kann, sich aber empirisch als nicht haltbar erwies. 1929 wandte er die Idee von Eichtransformationen auf die komplexen Phasenfaktoren der von Erwin Schrödinger 1926 eingeführten quantenmechanischen Wellenfunktionen an [9] und begründete damit das heutige Standardmodell der Materie in der geometrischen Struktur eines eichinvarianten Faserbündels.

## Diskreter Raum oder Kontinuum

Erste Ideen zu einer endlichen Geometrie stammten von Karl Georg Christian von Staudt, der sich in seiner *Geometrie der Lage* von 1847 als Erster völlig von Begriffen wie ‚parallel‘, ‚Abstände‘ und ‚Winkel‘ löste, da sie in projektiven Geometrien keine Rolle spielen und in seinem ‚synthetischen‘ Zugang zur Geometrie auch nicht benötigt werden [10].<sup>1</sup> Einen ersten axiomatischen Zugang und konkrete Beispiele von ‚finiten Geometrien‘ stammten dann von Gino Fano, aber erst 1906 beschrieb Oswald Veblen finite projektive Geometrien systematisch durch homogene Koordinaten aus einem endlichen Körper  $\mathbb{K}_n$  [11], was als grundlegender Startpunkt dieses Gebietes der Mathematik gelten kann. Riemann beendet seinen Habilitationsvortrag mit einer interessanten Spekulation über finite Geometrien und Physik [5], dass

**bei einer discreten Mannigfaltigkeit das Princip der Massverhältnisse schon in dem Begriffe dieser Mannigfaltigkeit enthalten ist, bei einer stetigen aber anders woher hinzukommen muss. Es muss also entweder das dem Raume zu Grunde liegende Wirkliche eine discrete Mannigfaltigkeit bilden, oder der Grund der Massverhältnisse ausserhalb, in darauf wirkenden bindenden Kräften, gesucht werden.**

Die Entscheidung dieser Fragen kann nur gefunden werden, indem man von der bisherigen durch die Erfahrung bewährten Auffassung der Erscheinungen, wozu Newton den Grund gelegt, ausgeht und diese durch Thatsachen, die sich aus ihr nicht erklären lassen, getrieben allmählich umarbeitet; [...] Es führt dies hinüber in das Gebiet einer andern Wissenschaft, in das Gebiet der Physik, welches wohl die Natur der heutigen Veranlassung nicht zu betreten erlaubt.

---

<sup>1</sup>Sein Versuch, Geometrie von Abstandsmaßen zu lösen und „die Geometrie der Lage zu einer selbstständigen Wissenschaft zu machen, welche des Messens nicht bedarf“, muß neben Riemanns konsequenter Fortführung als der geometrische Ursprung von der Allgemeinen Relativitätstheorie Einsteins gelten.

Es ist schade, dass der Erfolg Riemannscher Mannigfaltigkeiten diesen alternativen Zugang in der Physik verschüttet hat. Selbst Hermann Weyl hielt an der differentialgeometrischen Struktur der Raumzeit fest und meinte:

Vom Wesen des Raumes bleibt dem Mathematiker bei seiner Abstraktion nur die eine Wahrheit in Händen: daß er ein dreidimensionales Kontinuum ist.

Auch Albert Einstein fand, eine Abkehr vom raumzeitlichen Kontinuum sei „ähnlich wie der Versuch, in einem luftleeren Raum zu atmen“. Dies soll hier nun dennoch versucht werden. Basierend auf ersten Ideen vom September 2015 [12] und den mathematischen Grundlagen von Ref. [13] soll hier nun motiviert werden, daß erst durch die Annahme von nur endlich vielen Ereignispunkten in der Welt es gelingt, ein **einheitliches geometrisches Modell von Raum, Zeit und Materie** zu formulieren.

## Lineare Welten: Axiome der Inzidenz

Elementare Ereignisse sind als punktartige Elemente der Welt durch Fall- oder Lagebeziehungen miteinander verbunden. Deswegen beginnen wir mit einer kurzen Grundlegung der Geometrie als diejenige mathematische Disziplin, die solche Inzidenzen in ihren formalen Eigenschaften untersucht. Mathematiker beginnen gerne mit möglichst wenigen, expliziten Annahmen und fragen dann, was daraus logisch bereits folgt. Für ein geometrisches Modell der physikalischen Welt benötigt man klassischerweise ‚Punkte‘ und ein Konzept, wie diese zusammenhängen sollen.<sup>2</sup> Punkte sollen Ereignisse in Raum und Zeit markieren, d. h. ‚Raumzeitpunkte‘ sein, während Linien die Orte eines Geschehens in dieser Raumzeit markieren, z. B. die Bewegung eines Teilchens durch aufeinanderfolgende Orte in Raum und Zeit. Felix Klein schlug in seinem „*Erlanger Programm*“ vor, die projektive Geometrie zur Grundlage aller geometrischen Fragen zu machen [4]. Sie beruht im wesentlichen auf nur drei Axiomen des ‚Zusammentreffens‘ (‚Schnittes‘ oder der ‚Inzidenz‘) von Punkten:

- (i) es gibt Punkte  $P$ ;
- (ii) zwei Punkte sind immer genau durch eine Linie  $L$  verbunden;
- (iii) zwei Linien in einer Ebene schneiden sich immer in genau einem Punkt.

Punkte  $P$  und Linien  $L$  sind dabei geometrische Objekte, die keine weiteren Eigenschaften als die genannten (Inzidenzrelationen) haben. Linien  $L = \{P_1, P_2, \dots\}$  sind dabei sekundäre Objekte, da sie aus Mengen von Punkten  $P_i$  bestehen. Man kann zeigen, dass eine Menge von Punkten, die solche Eigenschaften haben, nicht notwendigerweise eine kontinuierliche Menge wie unser gewöhnlicher Anschauungsraum sein muß. Sie kann zwar kontinuierlich mit unendlich vielen Punkten und Linien als durchgezogenen Geraden realisiert werden (siehe Abb. 3a), aber auch mit nur endlich vielen Punkten, die eben nicht ‚dicht‘ sondern ‚vereinzelt‘ liegen, und ‚Linien‘ nur Ketten aufeinander folgenden Punkte sind (siehe Abb. 3b). Wir wollen im folgenden das kontinuierliche Weltmodell mit  $\mathbb{R}^d$  bezeichnen und das finite Weltmodell mit

---

<sup>2</sup>Eine Geometrie  $\mathfrak{P} = (\mathcal{P}, \mathcal{L}, \in)$  ist eine Menge von Punkten  $\mathcal{P}$  und Linien  $\mathcal{L}$  deren Verbindung durch eine binäre Inzidenzrelation  $\in$  definiert ist. Es gibt auch Ansätze, die ohne den Begriff des Punktes in der Geometrie auskommen, so z. B. Whiteheads „Punktfreie Geometrie“ [2].

$\mathbb{K}_p^d$ , wobei  $d$  die *Dimension der Welt* angibt (d. h. die Anzahl verschiedener Richtungen) und  $p$  die *Anzahl der Punkte* in der finiten Welt bestimmt.<sup>3</sup>

Unter Punkten und Linien stellt man sich üblicherweise auf einem Blatt Papier gezeichnete Objekte vor, oder abstrahiert Objekte im Raum. Eine solche Vorstellung ist aber nicht notwendig, da die Annahmen **(i)**-**(iii)** mit ihren verwendeten Begriffen auch anders interpretiert werden können. Mit Punkten könnte man auch bestimmte ‚elementare Ereignisse‘ bezeichnen und ihre kausale Relation durch Linien darstellen. Ein gemeinsamer Schnittpunkt zweier Linien wäre dann der gemeinsame ‚Ursprung‘ zweier Ereignisfolgen. Wesentlich ist, ob die Axiome der Inzidenz sinnvoll zutreffend sind. Wir werden auf diese Interpretation von Geometrie im Kapitel 7 zurückkommen, um die Annahmen der Geometrie in einem prozesshaften Weltverständnis zu begründen.

In einer  $d$ -dimensionalen Geometrie schreibt man die Koordinaten  $p_\mu$  der Punkte

$$P = \begin{pmatrix} p_0 \\ p_1 \\ \vdots \\ p_{d-1} \end{pmatrix} \quad (2)$$

gerne mit einem griechischen Index  $\mu = 0, \dots, d-1$ , der die Richtungen anzeigt und sortiert sie in einen Vektor, d. h. ein lineares Schema. Die Koordinaten  $p_\mu$  sind entweder reelle Zahlen  $\mathbb{R}$  für eine kontinuierliche Geometrie oder natürliche Zahlen  $\mathbb{K}_p \subset \mathbb{N}$  für eine finite Geometrie  $\mathbb{K}_p^d$ , wobei ihre Zahlenwerte auf einen sogenannten ‚endlichen Körper‘

$$\mathbb{K}_p := \left\{ -\frac{p-1}{2}, -\frac{p-1}{2} + 1, \dots, -1, 0, 1, \dots, \frac{p-1}{2} - 1, \frac{p-1}{2} \right\} \quad (3)$$

eingeschränkt werden, d. h. keine Koordinate größer als  $\frac{p-1}{2}$  oder kleiner als  $-\frac{p-1}{2}$  ist.<sup>4</sup>

Mit dem kartesischen Koordinatensystem (2) ist es möglich, verschiedene Modelle für Geometrien von Punkten und Linien zu formulieren, die die Axiome **(i)** - **(iii)** erfüllen. Verwendet man reelle Zahlen  $\mathbb{R}$  impliziert dies auch die Existenz sogenannter ‚transzendenter‘ Zahlen wie der Eulerschen Zahl  $e$  oder der Kreiszahl  $\pi$  in der Natur. Verwendet man dagegen die endlichen Zahlen  $\mathbb{K}_p$  aus Gl. (3), dann kann es im strikten Sinne weder ‚Kreise‘ noch ‚Exponentialfunktionen‘ im kontinuierlichen Sinne geben, sondern nur finite Analoga, die den reellen Objekten annähernd ähnlich sind. Es ist wichtig, dabei festzuhalten, dass solche Modelle nur bestimmte Darstellungsweisen der Struktur sind, die Geometrie aber auch ohne Zahlen und Koordinaten wohldefiniert ist und ihre Eigenschaften nur von den eingeführten Axiomen abhängen darf. Hier dienen die Zahlen ‚nur‘ als ein bequemes Mittel zur Benennung von Punkten - wie Hausnummern. Diese Rolle der Zahlen zur Darstellung von Punkten und Linien wird in Kapitel 5 weiter diskutiert, da die Unabhängigkeit von spezifischen Modellvorstellungen oder Zahlen ein wichtiges Kriterium für die Bedeutung eingeführter Größen und Konzepte ist. Im folgenden sind die mengentheoretischen und topologischen Unterschiede der verschiedenen Zahlensysteme nicht relevant, da diese erst für den Kontinuumslimes in Abschnitt 5 beachtet werden müssen.

<sup>3</sup>Das Theorem von Veblen und Young zeigt, dass jede (homogene) projektive Geometrie der Dimension  $d \geq 3$  als Vektorraum über einen Schiefkörper dargestellt werden kann. Nach dem Theorem von Wedderburn bedeutet dies insbesondere, dass jede *finite* Geometrie über einen endlichen Körper  $\mathbb{K}_n$  zu einer Primzahlpotenz  $n = p^r$  koordiniert werden kann, wobei die algebraischen Rechenoperationen modulo  $n$  durchgeführt werden.

<sup>4</sup>Damit  $\mathbb{K}_p$  ein Körper mit Division ist, muß  $n = p^r$  eine Primzahlpotenz sein. Es genügt hier davon auszugehen, dass  $n = p$  eine einfache Primzahl  $p$  ist.

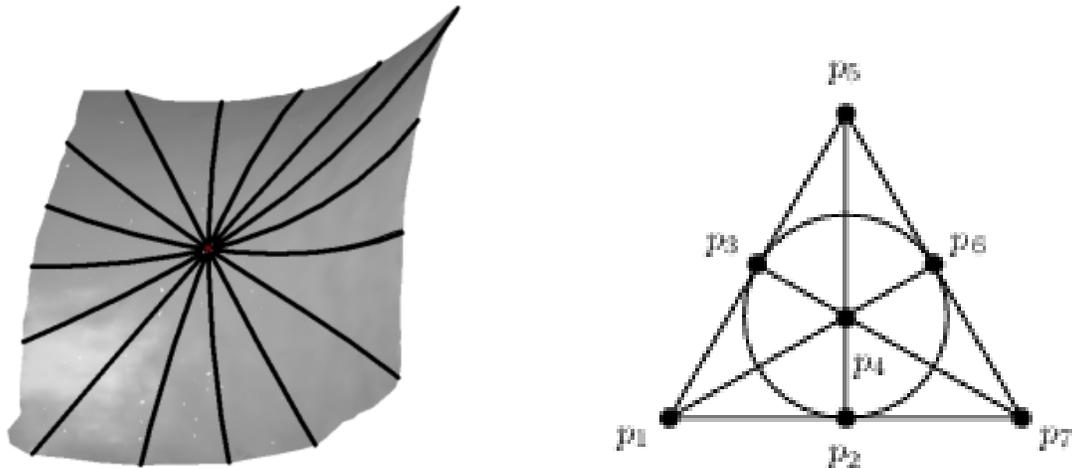


Abbildung 3: (a) Kontinuierliche Mannigfaltigkeit  $\mathbb{M}^d$  ist ein gekrümmter Euklidischer Raum  $\mathbb{R}^d$ : eine glatte Fläche mit Linien durch einen zentralen Punkt, wobei der Rand der Fläche künstlich zustande kommt. (b) Endliche Punktmenge  $\mathbb{K}_p^d$ : die kleinste projektive Geometrie ist die Fano-Ebene  $\mathbb{K}_2^7$  bestehend aus 7 Punkten und 7 Linien, die die 3 Axiome (i)-(iii) erfüllen. Sie hat keinen Rand, sondern besteht nur aus den gezeigten Punkten  $P_i$  mit  $i = 1, \dots, 7$ ; die Linien geben nur an, welche Punkte zusammengehören, z. B. die Punkte der Linie  $L = \{P_1, P_2, P_7\}$ .

Die Axiome (i) - (iii) legen eine sogenannte *projektive* Geometrie einer Ebene fest, die völlig symmetrisch in Punkten und Linien ist und aus der alle möglichen anderen ‚Geometrien‘ durch weitere Annahmen spezifiziert werden können. So entsteht z.B. eine Euklidische Geometrie der Ebene u. a. durch die Forderung des oben diskutierten Parallelenpostulats und z.B. eine hyperbolische Geometrie u. a. durch die Forderung unendlich vieler Parallelen durch einen Punkt. Mit anderen Worten, die projektive Geometrie ist ein umfassender Ansatz, der gleichermaßen die Euklidische und auch die Nicht-Euklidischen Geometrien durch Spezifikationen beschreiben kann. Wir werden für das hier vorgestellte finite projektive Weltmodell keine weiteren solchen einschränkenden Postulate fordern, sondern nur eine Nachbarschaftsrelation der Punkte einführen, aus der spezielle lokale Geometrien durch einen physikalischen Prozess von Ereignissen entstehen können. In Abschnitt 5 wird gezeigt, wie lokal ein euklidischer Basisraum durch gebundene Systeme (starre Körper) entstehen kann, die die umfassende Symmetrie des projektiven Raumes in die euklidische Bewegungssymmetrie brechen.

## Quadriken: Die Ordnung von Nachbarschaften

Beide Abbildungen 3 sind allerdings irreführend, denn (mathematisch streng genommen) ist durch die Annahmen i-iii auf einer Linie  $L$  die Abfolge oder der Abstand der Punkte  $P$  noch gar nicht definiert, wofür man nämlich eine vierte Annahme benötigt:

(iv) jeder Punkt auf einer Linie hat genau zwei Nachbarpunkte, die den Abstand 1 haben.

Die Menge dieser Nachbarpunkte bildet eine sogenannte ‚*Quadrik*‘  $Q$  (oder ‚quadratische Form‘) um jeden Punkt. Nehmen wir als Beispiel die reelle Zahlenachse  $\mathbb{R}$  als Linie, so sind zu einem beliebigen Punkt  $o \in \mathbb{R}$  auf dieser Linie, seine zwei Nachbarpunkte  $p_+ \in \mathbb{R}$  und

$p_- \in \mathbb{R}$  durch die quadratische Gleichung

$$a(p - o)^2 + b(p - o) + c = 0 \quad (4)$$

mit den reellen Parametern  $a, b, c$  eindeutig bestimmt. Die 1-dimensionale Quadrik

$$Q = \{p_+, p_-\} \quad (5)$$

ist die Lösungsmenge dieser Gleichung und besteht in diesem 1-dimensionalen Fall aus den beiden Nachbarpunkten  $p_+$  und  $p_-$  von  $o$ . ‚Quadratisch‘ muss die Form deswegen sein, da nur eine quadratische Gleichung genau zwei Lösungen hat.<sup>5</sup> In der (euklidischen) zwei-dimensionalen Ebene kennt man die Lösungsmenge  $Q$  einer quadratischen Gleichung als Kreis, Ellipse, Parabel oder Hyperbel, die sich alle als sogenannte ‚Kegelschnitte‘ darstellen lassen (siehe Abbildung 4). Eine allgemeine quadratische Form kann in den Koordinaten (2) als Summe

$$s^2 = \sum_{\mu} \sum_{\nu} g_{\mu\nu} p_{\mu} p_{\nu} \quad (6)$$

über die Indizes  $\mu$  und  $\nu$  ausgedrückt werden, wobei die Parameter der quadratischen Gleichung (z. B.  $a, b, c$  in Gl. (4)) in der sogenannten *Metrik*  $g_{\mu\nu}$  zusammengefaßt werden und  $s$  den *Abstand* eines Punktes  $P$  mit den Koordinaten  $p_{\mu}$  zum *Zentrumspunkt*  $O$  mit  $p_{\mu} = 0$  bezeichnet. Die Quadrik  $Q$  zum Zentrum  $O$  des Koordinatensystems ist dann die Lösungsmenge der Gleichung (6) mit dem Abstand  $s^2 = 1$ . Eine Metrik  $g_{\mu\nu}$  ist also nur eine bestimmte Koordinatenschreibweise einer Quadrik  $Q$  als Menge der Nachbarpunkte, weshalb man (wie die Punkte  $P$  in ein lineares Schema (2)) eine Quadrik auch in einem quadratischen Schema darstellt, einer sogenannten ‚Matrix‘<sup>6</sup>

$$g = \begin{pmatrix} g_{00} & \cdots & g_{0d} \\ \vdots & & \vdots \\ g_{d0} & \cdots & g_{dd} \end{pmatrix}, \quad (7)$$

die alle Information enthält, um die Nachbarpunkte  $Q$  von  $O$  zu berechnen.

Wie die Linien  $L$  sind auch die Quadriken  $Q$  sekundäre geometrische Objekte, die aus einer bestimmten Menge von Punkten bestehen, z. B. ein Kreis aus allen Punkten, die einen konstanten Abstand zu einem Zentrumspunkt  $O$  haben. Man kann systematischer sagen, dass Punkte  $P$  Objekte 0. Ordnung sind, Linien  $L$  Objekte 1. Ordnung und Quadriken  $Q$  Objekte 2. Ordnung, da sie auch Linien enthalten können. Objekte 3. oder höherer Ordnung sind bisher für eine adäquate Weltbeschreibung nicht notwendig. Schon Paul Ehrenfest fragte 1917 nach dem Grund für die Bedeutung ‚des Quadratischen‘ [14]:

Aber es greift noch eine andere ganze Zahl in jeden Winkel der Physik ein: *der Exponent zwei des Theorems von Pythagoras*. Oder anders ausgedrückt: die homogenen *quadratische* Maßbestimmung<sup>7</sup>

$$ds^2 = \sum_h \sum_k g_{hk} dx_h dx_k$$

---

<sup>5</sup>Die Notwendigkeit der Quadratzität in höheren Dimensionen  $d$  gilt nur in finiten Geometrien  $\mathbb{K}_p^d$ , da für sie auch die entarteten Formen (wie z. B.  $-p_0^2 + p_1^2 = 1$  und  $-p_0^2 + p_2^2 = 1$ ) als Metriken für Hyperebenen quadratisch sein müssen, um eine Ordnung von Hyperebenen angeben zu können (siehe C. in Kap. 3).

<sup>6</sup>Im Unterschied zu Euklidischen bzw. affinen Räumen ist  $Q$  für projektive Räume eine  $(d + 1) \times (d + 1)$ -Matrix, da auch die Punkte im Unendlichen, bzw. die Linien und Ebenen als zusätzliche Freiheitsgrade strukturiert werden müssen.

<sup>7</sup>Die Verwendung von  $dx_{\mu}$  und  $ds$  anstelle von  $p_{\mu}$  und  $s$  in Gl. (6) markiert nur die differentialgeometrische Version einer quadratischen Form

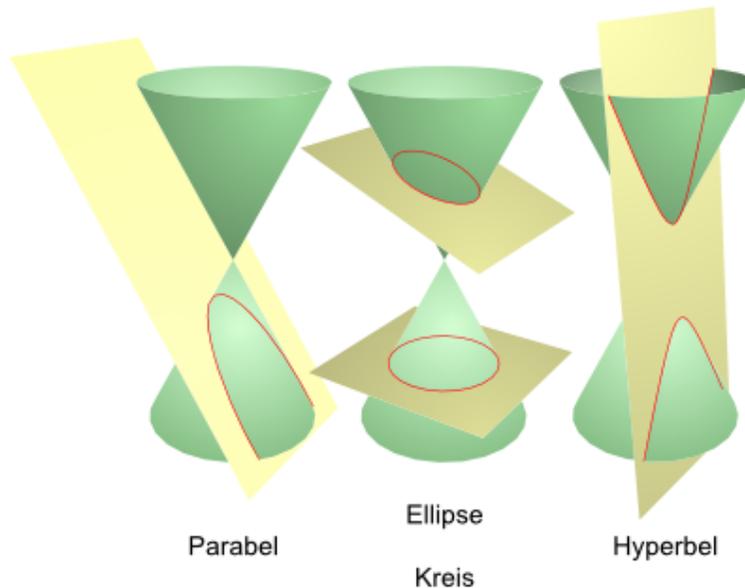


Abbildung 4: Kreis, Ellipse, Parabel und Hyperbel sind die im 300. Jhrh. v. Chr. von Apollonios von Perga in seinem Buch *Konika* eingeführten ‚Kegelschnitte‘ der Euklidischen Geometrie, die sich seit Descartes auch als ‚quadratische Formen‘ oder kurz ‚Quadriken‘ (6) beschreiben lassen und die bereits Kepler als Grundfiguren für die Bewegung der Planeten erkannte. Alle Kegelschnitte bis auf die (entartete) Parabel haben in ihrer Schnittebene einen eindeutigen ‚Zentrumspunkt‘  $O$ . Als Nachbarpunkte des Zentrums sind genau diejenigen Punkte in der Ebene auf dem Kegelschnitte definiert. Je nach Neigung der Ebene hat man eine andere Geometrie der Nachbarschaftsrelation, nämlich eine Euklidische (Kreis), elliptische oder hyperbolische Geometrie. (Quelle: [lp.uni-goettingen.de/get/text/5176](http://lp.uni-goettingen.de/get/text/5176))

hat eine überherrschende Bedeutung gegenüber allen anderen homogenen Formen.  
 - Läßt sich an diesem *zwei* nichts mehr fragen und begreifen?

Geht man von der Notwendigkeit der Annahme **(iv)** aus, läßt sich die Frage beantworten: der Grund für quadratische Formen scheint in der Ordnung von Nachbarpunkten zu liegen, die es in kontinuierlichen Geometrien zunächst gar nicht gibt und erst durch die Metrik  $g_{\mu\nu}$  angegeben werden müssen. Die Bedeutung von  $g_{\mu\nu}$  für metrische Maßbestimmungen, d. h. von Abständen erscheint dagegen sekundär. Es ist bemerkenswert, dass Felix Klein mit seinem Erlanger Programm von 1872 und wiederholt in einem Vortrag von 1910 darauf hinweist, dass metrische Beziehungen (Abstände) von einem modernen Blickpunkt nur sekundäre Eigenschaften sind. In finiten Geometrien wird dies noch deutlicher durch die primäre Notwendigkeit einer Nachbarschaftsbeziehung noch vor jedem Abstandsbegriff. Die fehlende Notwendigkeit von geometrischen Objekten höherer Ordnung könnte vielleicht durch ein Weltbild verständlich werden, in dem Punkte, Linien und Quadriken Ausdruck eines Prozesses von elementaren Ereignissen sind, für den man nur eine Nachfolgeordnung aber keine höhere Ordnung benötigt. Wir werden auf ein solches Weltbild im Kapitel 7 zurückkommen.

Je nach Wahl der quadratischen Form (6), d. h. der Parameterwerte in der Metrik  $g_{\mu\nu}$  erhält man verschiedene ‚Geometrien‘ der Nachbarschaftsbeziehung **(iv)**, d. h. verschiedene Quadriken  $Q$  und damit verschiedene Begriffe von Raumabständen und Zeitdauern. Denn mit jeder Quadrik  $Q$  läßt sich als einer Menge von ‚Einheitspunkten‘ ein wohldefinierter *Abstand*

zwischen beliebigen Punkten ableiten, indem man einfach sukzessive von einem Nachbarpunkt zum nächsten ‚fortschreitet‘ und die Anzahl der Schritte zählt. Die Möglichkeit unterschiedliche Quadriken als Maßbeziehungen zu wählen, ist der Grund für das neue und oft irritierende Verständnis von Raum und Zeit in der Relativitätstheorie: wählt man eine hyperbolische Geometrie, erhält man die relativistischen Längenkontraktionen und Zeitdilatationen, die mittlerweile sehr gut in der Natur beobachtet und genau gemessen wurden. Doch sind wir frei, eine Quadrik einfach zu wählen oder gibt es ein Naturgesetz, das die Metrik festlegt?

## 2 Geometrie und Physik

Was ist ein Punkt im Raume? Jedermann glaubt es zu wissen, aber das beruht auf einer Täuschung. Was wir sehen, wenn wir versuchen, uns einen Punkt im Raume vorzustellen, ist ein schwarzer Fleck auf weißem Papier oder ein Kreidefleck auf einer schwarzen Tafel, es ist immer ein Gegenstand.  
Henri Poincaré, *Wissenschaft und Hypothese* (1902).

Mit Einsteins Allgemeiner Relativitätstheorie hat die Geometrie Einzug gehalten in die physikalische Modellierung der Welt. Durch sie entstand sogar ein neues Paradigma in der Hoffnung, alle physikalischen Phänomene der Natur durch geometrische Eigenschaften von Raum und Zeit erklären zu können.

### Allgemeine Relativitätstheorie der Raumzeit

Eine Quadrik definiert daher eine Metrik  $g_{\mu\nu}$ , die Einstein als ein eigenständiges physikalisches Objekt ansah und zum Ausgangspunkt seiner Allgemeinen Relativitätstheorie von Raum, Zeit und der Gravitation der Materie machte. Er erkannte, dass in jedem Punkt  $P$  der Raumzeit eine eigene Metrik  $g_{\mu\nu}(P)$  sich befindet, wobei die Abhängigkeit der Metrik von den Punkten durch ein Naturgesetz bestimmt sei. Wie die Beschleunigung  $a$  eines Teilchens und dadurch auch seine Bahnkurve durch die Newtonsche Bewegungsgleichung  $F = ma$  und die Angabe einer Kraft  $F$  determiniert ist, formulierte er zur Festlegung der Metrik  $g_{\mu\nu}$  als Naturgesetz die *Einstein-Gleichung*

$$G_{\mu\nu}(P) = \kappa T_{\mu\nu}(P) , \quad (8)$$

wobei anstelle der Kraft der sogenannte Energie-Impuls-Tensor  $T_{\mu\nu}(P)$  der Materie und anstelle der Masse  $m$  die universelle Gravitationskonstante  $\kappa$  steht. Der Einstein-Tensor

$$G_{\mu\nu} = \mathcal{G} [g_{\mu\nu}] \quad (9)$$

ist dabei ein Maß für die lokale Krümmung der Welt (anstelle der Beschleunigung  $a$ ), der eindeutig aus der Metrik  $g_{\mu\nu}$  (anstelle der Bahnkurve) berechenbar ist. Dieses explizit bekannte Funktional  $\mathcal{G} [g_{\mu\nu}]$  ist der mathematisch technisch schwierige Teil der Allgemeinen Relativitätstheorie, der hier aber weggelassen werden kann, da zum Verständnis der Physik nur die Gleichung (8) wichtig ist. Sie drückt die Gleichheit zweier eigentlich grundverschiedener Konzepte aus: die Geometrie der Raum-Zeit (Krümmung  $G_{\mu\nu}$ ) entspricht dem Energie-Impuls der Materie ( $T_{\mu\nu}$ ). Dadurch ist zwar noch keine Einheit von Materie, Raum und Zeit ausgedrückt, wohl aber eine gegenseitige Beziehung bzw. Beeinflussung: erst die Metrik bestimmt, wie sich die Materie in Raum und Zeit bewegt, aber auch die Raumabstände und Zeitdauern werden durch die Materie und ihre Bewegung beeinflusst. Experimentell ist die Einstein-Gleichung

auf großen Skalen hervorragend bestätigt worden - allerdings nicht auf sehr kleinen Skalen, so dass hier Raum für andere geometrische Weltmodelle ist, für die Gl. (8) nur ein Grenzfall auf großen Skalen ist.

Diese Flexibilität der fundamentalen Modellbildung ist wichtig, denn zur rechten Seite der Gl. (8), d. h. über die Materie und ihre Eigenschaften (Energie-Impuls-Tensor  $T_{\mu\nu}(P)$ ) macht die Allgemeine Relativitätstheorie wenige Aussagen.<sup>8</sup> Hermann Weyl faßt die Bedeutung einer ‚physikalischen Interpretation‘ der Metrik durch Einstein so zusammen (S. 225 in [1]):

Die obigen Überlegungen lassen klar erkennen, welchen physikalischen Sinn die von Einstein vollzogene, auf den ersten Blick so befremdliche *Synthese von Maßgeometrie und Gravitation* hat. Wir können diese geniale Verknüpfung zweier Erkenntnisgebiete, die bis dahin in der historischen Entwicklung völlig getrennt verlaufen waren, durch das Schema andeuten:

$$\underbrace{\text{Pythagoras} \quad \text{Newton}}_{\text{Einstein}}$$

[...] Die alte Einteilung in Geometrie, Mechanik und Physik muß in der Einsteinschen Theorie durch die Gegenüberstellung von physikalischem Zustand und metrischem oder Gravitationsfeld ersetzt werden.

Mit dem ‚physikalischem Zustand‘ spricht Hermann Weyl allerdings auch das entscheidend Fehlende in der Allgemeinen Relativitätstheorie an: eine Theorie der Materie.

## Das Standardmodell der elementaren Teilchen

Für den Energie-Impuls-Tensor  $T_{\mu\nu}$  der Materie in der Einstein-Gleichung (8) ist ein völlig anderer Typ von Theorie entwickelt worden, die sogenannten *Quantenfeldtheorie*. Diese setzt die Existenz einer Raumzeit von Punkten  $P$  mit ihren Metriken  $g_{\mu\nu}(P)$  einfach voraus und postuliert dazu die Existenz von *Teilchenfeldern*

$$\psi(P) \in \mathbb{C} \tag{10}$$

als komplexwertigen Funktionen auf dieser Punktmenge (Schnitten im Faserbündel), von denen der *Energie-Impuls-Tensor*

$$T_{\mu\nu}(P) = \mathcal{T}[\psi(P)] \tag{11}$$

eindeutig abhängt. Auf die Idee, *komplexe Zahlen*  $\mathbb{C}$  für die Darstellung der Teilchenfelder (10) zu verwenden, kam 1922 Erwin Schrödinger als er sich mit Hermann Weyls Eichtheorie aus seinem Buch *Raum - Zeit - Materie* (1918) beschäftigte. In den Abschnitten 5 und 6 werden wir auf den Grund zu sprechen kommen und klären, was die komplexen Zahlen  $\mathbb{C}$  mit finiten Geometrien zu tun haben.

Experimentell fand man in Teilchenbeschleunigern wie dem CERN (Genf) und DESY (Hamburg) unterschiedliche Typen von elementaren Teilchen, die sich aufgrund ihrer gemessenen Eigenschaften (Masse, Ladung, Spin) in das in Abbildung 5 gezeigte Schema einordnen ließen. Die in der theoretischen Darstellung dieser Teilchen benutzten Teilchenfelder

$$\psi(P) = \psi_i(P) \times q_j(P) \times \nu_l(P) \times e(P) \tag{12}$$

---

<sup>8</sup>Der Energie-Impuls-Tensor muß zwar kompatibel mit der metrischen Struktur sein, was Materiedynamiken ausschließt aber  $T_{\mu\nu}$  nicht eindeutig festlegt und insbesondere nicht bestimmt, welche elementaren Teilchen existieren.

Drei Generationen  
der Materie (Fermionen)

	I	II	III		
Masse	2,3 MeV	1,275 GeV	173,07 GeV	0	125,09 GeV
Ladung	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$	0	0
Spin	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1	0
Name	<b>u</b> up	<b>c</b> charm	<b>t</b> top	<b>γ</b> Photon	<b>H</b> Higgs Boson
	4,8 MeV	95 MeV	4,18 GeV	0	
	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	0	
	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1	
Quarks	<b>d</b> down	<b>s</b> strange	<b>b</b> bottom	<b>g</b> Gluon	
	<2 eV	<0,19 MeV	<18,2 MeV	91,2 GeV	
	0	0	0	0	
	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1	
	<b>ν<sub>e</sub></b> Elektron- Neutrino	<b>ν<sub>μ</sub></b> Myon- Neutrino	<b>ν<sub>τ</sub></b> Tau- Neutrino	<b>Z<sup>0</sup></b> Z Boson	
	0,511 MeV	105,7 MeV	1,777 GeV	80,4 GeV	
	-1	-1	-1	±1	
	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1	
Leptonen	<b>e</b> Elektron	<b>μ</b> Myon	<b>τ</b> Tau	<b>W<sup>±</sup></b> W Boson	Eichbosonen

Abbildung 5: Materie besteht aus elementaren Teilchen, die aufgrund ihrer Eigenschaften (Masse, Ladung, Spin) in ein bestimmtes Schema einsortiert werden können, das Ausdruck einer fundamentalen Symmetrie der Teilchenfelder  $\psi(P)$  in Gl. (11) ist, die sogenannten Eichgruppe  $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$ . Woher dieses Schema kommt, ist die zentrale Frage einer vereinheitlichenden Feldtheorie, nach der seit Jahrzehnten bisher erfolglos gesucht wird. (Quelle: [de.wikipedia.org/wiki/Standardmodell](http://de.wikipedia.org/wiki/Standardmodell))

sind das Produkt verschiedener Eigenschaftsfelder und müssen deswegen auch verschiedene Indizes ( $i, j, k$ ) tragen, die ihre Eigenschaften charakterisieren. Man unterscheidet ein

- F4:** 4-komponentiges ‚Spinor-Feld‘  $\psi_i(P)$  mit Spin-Index  $i = 1, 2, 3, 4$ , das den Spin  $\frac{1}{2}$  darstellt und das Erscheinen der Teilchen in der 4-dimensionalen Raumzeit beschreibt;
- F3:** 3-komponentiges ‚Quark-Feld‘  $q_j(P)$  mit Farb-Index  $j = 1, 2, 3$ , der die ‚Farbladung‘ der starken Wechselwirkung trägt, die durch 8 Gluonfelder  $g_\mu^j(P)$  vermittelt wird;
- F2:** 2-komponentiger ‚Isospin-Feld‘  $\nu_l(P)$  mit Index  $l = 1, 2$ , der die ‚Isospin-Ladung‘ der schwachen Wechselwirkung trägt, die durch die drei ‚schwachen Vektorfelder‘  $W_\mu^\pm(P)$  und  $Z_\mu^0(P)$  vermittelt wird;
- F1:** 1-komponentiges ‚Ladungs-Feld‘  $e(P)$  ohne Index, das die Ladung (Stärke) der elektromagnetischen Wechselwirkung trägt, die durch ein Photonenfeld  $\gamma_\mu(P)$  vermittelt wird.

Zudem gibt es das 4-komponentige Higgs-Feld  $H(P)$ , das die Masse erzeugt, sowie drei Kopien, ‚Flavours‘ oder Familien der elementaren Teilchen (1.-3. Spalte in Abb. 5), die sich nur in ihren Massen unterscheiden. Nicht alle Teilchen müssen alle Ladungen tragen, so dass deren Teilchenfelder  $\psi$  dann den entsprechenden Faktor im Produkt (12) und auch den dazugehörigen Index nicht haben. Teilchen, die Farbladung tragen, nennt man *Quarks*; Teilchen,

die keine Farbladung tragen, nennt man *Leptonen*. Bei manchen Teilchen braucht man aber alle Indizes, z. B. für das ‚up-Quark‘ (links oben in dem Schema von Abb. 5) mit Ladung  $2/3$  (Faktor  $e$ ), Isospin (Faktor  $\nu_l$ ), Farbladung (Faktor  $q_j$ ) und Spin  $1/2$  (Faktor  $\psi_i$ ). Historisch war die Entdeckung dieser elementaren Teilchen ein langer Prozess über 100 Jahre hinweg, der sich im wesentlichen von der Identifizierung des Elektrons 1897 durch Joseph John Thomson bis zur Messung des Higgs-Teilchens hinzog, dessen Nachweis am 4. Juli 2012 vom CERN bekannt gegeben wurde.

Das Funktional  $\mathcal{T}$  in Gl. (11) für die Abhängigkeit des Energie-Impuls-Tensor von diesen Teilchenfeldern  $\psi(P)$  ist ein zugegebenermaßen komplizierter, aber doch explizit bekannter Ausdruck, das sogenannte *Standardmodell* der Elementarteilchentheorie, das experimentell vielfach überprüft und hervorragend bestätigt wurde. Das Funktional  $\mathcal{T}$  bestimmt nicht nur den Energie-Impuls  $T_{\mu\nu}(P)$  sondern auch die sogenannten Materie-Ströme  $J_\mu^a(P)$  im Punkt  $P$  und durch *verallgemeinerte Maxwell-Gleichungen*, die sogenannten *Yang-Mills-Gleichungen*

$$D^\nu F_{\mu\nu}^a = gJ_\mu^a(P) \quad (13)$$

die Feldstärke-Tensoren  $F_{\mu\nu}^a = \mathcal{F}[\phi_\mu^a]$  von *Eichfeldern*

$$\phi_\mu^a(P) \in \mathbb{C} \quad (14)$$

analog wie der Einstein-Tensor  $G_{\mu\nu} = \mathcal{G}[g_{\mu\nu}]$  der Metrik  $g_{\mu\nu}(P)$  durch die Einstein-Gleichung (8) und den Energie-Impuls  $T_{\mu\nu}(P)$  bestimmt ist. Warum neben den Teilchenfeldern  $\psi(P)$  (10) diese Eichfelder  $\phi_\mu^a(P)$  als ein völlig neuer Typ von Feldern auftauchen, ist im Rahmen des Standardmodells nicht erklärbar. Auch die durch Messungen bekannten Werte der sogenannten universellen Kopplungsstärken  $g$  dieser Eichfelder an die Teilchenfelder, analog zu der Gravitationskonstante  $\kappa$  in der Einstein-Gleichung (8), sind unverständlich.

Auch hier ist dieser mathematisch-technisch schwierige Teil des Standardmodells für das Verständnis der Physik nicht relevant. Wichtig ist hingegen, dass das Funktional  $\mathcal{T}[\psi(P)]$  in seinen Argumenten, den Teilchenfeldern  $\psi(P)$ , eine überraschende Symmetrie aufweist, die mathematisch durch die sogenannte *Eichgruppe* (‚gauge group‘)

$$SU(3) \times SU(2) \times U(1) \quad (15)$$

beschrieben wird, deren Symmetrie-Transformation durch bestimmte Eichfelder

$$\phi_\mu^a(P) = \begin{cases} \text{Photonenfeld } \gamma_\mu(P) & \text{für } U(1)\text{-Symmetrie} \\ \text{schwache Vektorfelder } W_\mu^\pm(P), Z_\mu^0(P) & \text{für } SU(2)\text{-Symmetrie} \\ \text{Gluonenfelder } g_\mu^j(P) & \text{für } SU(3)\text{-Symmetrie} \end{cases} \quad (16)$$

parameterisiert werden können. Das Konzept einer Eichsymmetrie wurde bereits 1918 von Hermann Weyl gleich nach Einsteins Allgemeiner Relativitätstheorie als eine notwendige Erweiterung der Riemannschen Geometrie vorgeschlagen [1, 8, 9], um Materie beschreiben zu können. Wieso ausgerechnet diese Symmetrie (15) und genau die in Abb. 5 gezeigten elementaren Teilchenfelder (12) existieren, ist aber weitgehend unverständlich und wird durch das Standardmodell nicht erklärt. Die finite Geometrie bietet eventuell einen Erklärungsgrund in der Invarianz von Quadriken (7); siehe Kapitel 4. Geometrisch wird im Standardmodell durch die Teilchenfelder die Raumzeit (per Hand) zu einem sogenannten Hauptfaserbündel (Prinzipalbündel) erweitert, in dem die Eichfelder (14) einen ‚geometrischen Zusammenhang‘ definieren. Diese spezielle geometrische Struktur, deren Auftreten im Standardmodell nicht

erklärt werden kann, entsteht in der finiten projektiven Geometrie durch die Strukturierung mit einer Quadrik auf natürliche Weise, was in Kapitel 5 beschrieben wird.

Zusammenfassend kann man sagen, dass in einer kontinuierlichen Geometrie der Welt ungeklärt bleibt, woher der bekannte explizite Ausdruck  $\mathcal{T}[\psi(P)]$  für den Energie-Impuls-Tensor  $T_{\mu\nu}$  in der Einstein-Gleichung (8) kommt. Dennoch werden die Allgemeine Relativitätstheorie und das Standardmodell als die beiden fundamentalen Säulen des physikalischen Weltbildes angesehen, da alle bekannten Gesetzmäßigkeiten der physikalischen Phänomene aus ihnen hergeleitet werden können. Es ist heute kein einziger physikalischer Vorgang bekannt, der zu messbaren Abweichungen von der Vorhersage dieser beiden Theorien führt. Wenn also ein neuer (geometrischer) Ansatz die Allgemeine Relativitätstheorie und das Standardmodell begründen kann, dann kann sie zu Recht als eine ‚einheitliche‘ Theorie der Welt bezeichnet werden.

## Suche nach einer einheitlichen Theorie physikalischer Phänomene

Ein wichtiger (ästhetischer) Grund, warum die meisten Physiker weder die Allgemeine Relativitätstheorie noch das Standardmodell als der Weisheit letzten Schluß ansehen, ist die Kompliziertheit ihrer mathematischen Beschreibung: nichtlineare, partielle Differentialgleichungen wie die Einstein-Gleichung (8) und die Topologie von Hauptfaserbündeln wie die lokale Eichgruppe (15) - zumal in ihrer kanonisch quantisierten Operator Darstellung als Quantenfeldtheorien - sind nicht gerade als ‚mathematisch einfach‘ zu bezeichnen. Von der „Harmonie der Pythagoreer“ ist dies sicherlich weit entfernt. Das hier vorgestellte Weltmodell ist deutlich ‚harmonischer‘ und basiert auf wenigen Annahmen (i) - (vi) über die Natur von Ereignispunkten, die mathematisch im wesentlichen nur die Linearisierung quadratischer Formen verwendet. Dabei kehren die einfachen Kegelschnitte von Apollonios zurück in die fundamentale Physik - allerdings nicht zur Beschreibung von Planetenbahnen wie bei Kepler, sondern als ordnende Grundfigur der elementaren Ereignisse in der Welt.

‚Schön‘ oder auch nur ‚einfach‘ ist das Standardmodell sicherlich nicht zu nennen und es stellt sich natürlicherweise die Frage, ob dieses unübersichtliche Schema der Elementarteilchen nicht einen tieferliegenden Grund in einer einfachen geometrischen Struktur der Welt hat. Diese *gesuchte Einheit von Raum, Zeit und auch Materie*, die die Einstein-Gleichung (8) mitsamt ihrer komplizierten rechten Seite, dem Energie-Impulstensor  $T_{\mu\nu}$  der Materie erklärt, konnte aber bisher nicht in einem adäquaten geometrischen Weltmodell formuliert werden. Für dieses Ziel wurden zwar in den letzten 100 Jahren u. a. höhere Dimensionen der Welt postuliert<sup>9</sup>, neue geometrische Objekte wie Strings und Branes eingeführt oder völlig neue geometrische Strukturen wie ‚Supersymmetrien‘ ausgedacht - aber bisher ohne Erfolg.

Eine Theorie, die die Quantenphysik aller fundamentalen Kräfte und die Allgemeine Relativitätstheorie der Gravitation vereint und damit alle bekannten physikalischen Phänomene vollständig beschreibt, wurde in der Vergangenheit oft als ‚Weltformel‘ oder ‚Theory of Everything‘ (‚Theorie von Allem‘) bezeichnet. Die meisten bekannten Physiker der 20. Jahrhundert haben dazu Vorschläge gemacht, u. a. Albert Einstein und Werner Heisenberg (siehe Abb. 6) mit sogenannten *nicht-linearen* Feldtheorien [15, 16]. In den 1970ziger Jahren wurden sogenannte ‚Grand Unified Theories‘ (GUTs) vorgestellt, die eine Vereinigung der nicht-einfachen Eichgruppen (15) in größere (umfassende) Symmetriegruppen wie z. B. die  $SU(5)$ , die  $SO(10)$  oder auch exotische Liegruppen wie  $E(8)$ . Alle diese Versuche einer einheitlicheren Theorie als das Standardmodell sind an der Überprüfung ihrer empirischen Vorhersagen durch Experi-

---

<sup>9</sup>Z.B. in Kaluza-Klein-Theorien, aber auch in Stringtheorien und Supergravitationstheorien.



Abbildung 6: Am 24. 2 1958 schlägt Werner Heisenberg im Göttinger Physik-Kolloquium seine ‚Weltformel‘ vor. Es ist eine nicht-lineare partielle Differentialgleichung für die Wellenfunktion  $\psi$  in einer kontinuierlichen Raumzeit  $\mathbb{R}^d$ . Das hier vorgestellte finite Weltmodell  $\mathbb{K}_p^d$  stellt dagegen eine völlig neue Art von Physik dar, deren Naturgesetze allein auf Beziehungenrelationen **(i)**-**(vi)** von Ereignispunkten beruht und keine Differentialgleichungen verwendet. (Quelle: DPA / Günter Bratke)

mente gescheitert. Insbesondere konnten viele Grand Unified Theories experimentell widerlegt werden, weil sie einen Zerfall des Protons voraussagten, was aber nicht eintrat.

Es gibt mit Philip Anderson (*More is Different*, 1972) und Robert Laughlin (*Abschied von der Weltformel*, 2007) auch prominente Kritiker der Hoffnung, dass es überhaupt eine einheitliche Theorie der Physik geben kann, da die Emergenz immer neuer Phänomene auch neue Theorien nötig macht, die nicht auf eine fundamentale ‚Theorie von Allem‘ zurückgeführt bzw. reduziert werden könnten. Nun, so richtig die Bedeutung der Emergenz und der Notwendigkeit ist, auf jeder neuen Komplexitätsebene der Phänomene eigenständige adäquate Theorien zu entwickeln, so kurzschlüssig scheint die Folgerung zu sein, dass es keine einheitliche, fundamentale Theorie geben kann. Ein Weltmodell basierend auf der finiten Geometrie von Ereignissen versucht das Problem des Reduktionismus und Determinismus auf eine neue Weise zu lösen, indem es emergenten Phänomenen zukünftiger Ereignisse alle Freiheit zugesteht (siehe Kapitel 7). Das finite Weltmodell beruht auf einer scheinbar ‚kleinen‘ Abweichung von Einsteins Allgemeiner Relativitätstheorie: die Annahme der Endlichkeit von Ereignispunkten  $\mathcal{P}$  in der Welt anstelle eines Kontinuums von Raumzeitpunkten.

### 3 Ursprung der (3+1)-dimensionalen Welt: geometrische Eigenschaften endlich vieler Punkte

Ich betrachte es aber als durchaus möglich, dass die Physik nicht auf dem Feldbegriff begründet werden kann, d.h. auf kontinuierlichen Gebilden. Dann bleibt von meinem ganzen Luftschloss inklusive Gravitationstheorie nichts bestehen.

Albert Einstein, Brief an Michele Besso vom 10. August 1954.

Die Annahme, dass die Welt nur aus endlich vielen Punkten besteht, hat enorme Vorteile in der mathematischen Modellierung physikalischer Phänomene. Eine Beschreibung basierend auf kontinuierlichen Geometrien  $\mathbb{R}^d$  scheint nämlich unweigerlich Singularitäten zu erzeugen, bei denen physikalische Größen unendlich groß werden.<sup>10</sup> So führt im Rahmen der Allgemeinen Relativitätstheorie nach dem Penrose-Hawking-Theorem die Krümmung der kontinuierlichen Raumzeit  $\mathbb{R}^d$  zu einem ‚Gravitationskollaps‘, in dem Trajektorien von Teilchen einfach enden<sup>11</sup>. Auch im Rahmen der Quantenfeldtheorie für elementare Teilchen führt nach dem Haagschen Theorem jede Störungstheorie von Teilchen in einem kontinuierlichen Raum zu Widersprüchen, so dass jedes Wechselwirkungsbild inkonsistent ist bzw. mathematisch gar nicht existiert.<sup>12</sup> Diese unphysikalischen Konsequenzen der Mathematik kontinuierlicher Geometrien wurden in der Physik bisher gerne ignoriert - trotz ihrer Bedeutung, das Standardweltmodell grundlegend in Frage zu stellen.

Durch die Annahme einer finiten Geometrie wird dagegen eine fundamentale Skala eingeführt, die jede dieser mathematischen Inkonsistenzen auf natürliche Weise vermeidet. Allerdings hat es sich als äußerst schwierig erwiesen, ein finites Weltmodell zu formulieren, das empirisch adäquat ist. Ein vereinzelter Versuch wurde um 1950 von Gustav Järnefelt und Paul Kustaanheimo vorgeschlagen [17, 18], aber bald auch wieder aufgegeben. Neuere finite Ansätze wie die „Causal Set Theory“ von Rafael Sorkin haben bisher leider bei weitem nicht den Grad mathematischer Modellbildung erreicht, der z. B. eine Herleitung der Allgemeinen Relativitätstheorie oder des Standardmodells auf großen Skalen erlauben würde, um dadurch eine empirische Adäquatheit nachweisen zu können. Noch viel spekulativer sind das „Cellular Automaton Model“ von Gerard ’t Hooft, die „Digital Physics“ von John Archibald Wheeler, David Finkelstein’s „Space-Time Code“, Pierre Noyes’s „Bit-string physics“ oder Carl Friedrich von Weizsäcker „Ur-Theorie“. Allen diesen Ansätzen ist gemeinsam, dass ihnen keinerlei Kontakt zur empirischen Welt gelungen ist. Der hier vorgestellte Ansatz entfernt sich von den Konzepten der Allgemeinen Relativitätstheorie dagegen nicht sehr weit, sondern nutzt nur die spezifischen Eigenschaften finiter Geometrien, um im Rahmen der ART nicht nur Raum, Zeit und Gravitation, sondern auch Materiefelder geometrisch beschreiben zu können. Um die Möglichkeit dieser Antwort auf die Frage nach einer einheitlichen Theorie zu motivieren, lohnt es sich, zuerst Lösungen für Fragen zu finden, die im Rahmen der Allgemeiner Relativitätstheorie und des Standardmodells bisher gar nicht bzw. kaum gestellt wurden.

---

<sup>10</sup>Allein dass die Kontinuumshypothese (Georg Cantor, 1878) im Standardrahmen der Axiome einer Zermelo-Fraenkel-Mengenlehre weder widerlegt (Kurt Gödel, 1938) noch bewiesen (Paul Cohen, 1963) werden kann, sollte einen vorsichtig bei der Verwendung reeller Zahlen für die Beschreibung der Wirklichkeit machen.

<sup>11</sup>Kausalgeodätische Unvollständigkeit der kontinuierlichen Mannigfaltigkeit

<sup>12</sup>Grund ist die Translationsinvarianz der Vakuumpolarisation, die die Nichtexistenz unitärer Äquivalenz von Darstellungen impliziert.

## Ungelöste Probleme und ungestellte Fragen

Schon 1917 - gleich nachdem Albert Einstein die Natur von Raum und Zeit in Frage gestellt hatte, stellte Paul Ehrenfest (zudem) fest, dass nun auch die Dimensionalität des Raumes zu einer physikalischen Frage wurde [14]:

Welche Rolle spielt die Dimensionalität des Raumes in den Grundgesetzen der Physik? „Warum hat unser Raum gerade drei Dimensionen“ oder anders gefragt: „Welche singulären Vorkommnisse unterscheiden die Physik des  $\mathbb{R}_3$  von der in den übrigen  $\mathbb{R}_n$ ?“ So gestellt, sind die Fragen vielleicht sinnlos, jedenfalls fordern sie zur Kritik heraus.

Den entscheidenden Punkt hat er und auch Einstein dabei leider übersehen: der kontinuierliche Raum  $\mathbb{R}^d$  zeigt kaum Besonderheiten in verschiedenen Dimensionen, wohl aber der endliche Raum  $\mathbb{K}_p^d$ , bei dem die Dimension 4 besonders ist.<sup>13</sup> Warum sollen wir davon ausgehen, dass der Raum kontinuierlich ist? Das hier vorgestellte Weltmodell will zwar im wesentlichen den Ideen von Albert Einstein folgen - aber mit dem entscheidenden Unterschied in der Annahme, dass die Welt aus endlich vielen Punkten aufgebaut ist. Insbesondere wurden in der kontinuierlichen Geometrie  $\mathbb{R}^d$  der ART und des Standardmodells bestimmte Eigenschaften der Metrik  $g_{\mu\nu}$  einfach vorausgesetzt, obwohl man sie durchaus in Frage stellen kann:

- Woher kommt überhaupt die Zeit, bzw. warum gibt es genau nur eine Zeitdimension und nicht mehrere oder keine? In der ART ist ‚Zeit‘ eine notwendig vorausgesetzte Dimension der Welt, in einer finiten Geometrie folgt sie aus der Äquivalenz quadratischer Formen (siehe **A** unten).
- Wieso ‚leben‘ wir in drei Dimensionen des Raumes? In der ART ist die Dimension  $d$  ein willkürlich festgelegter Parameter, in einer finiten Geometrie folgt sie aus der Nicht-Existenz von Eikörpern für  $d \geq 4$  (siehe **B**. unten).
- Warum gibt es überhaupt Materie, bzw. was ‚ist‘ Materie eigentlich geometrisch? In der ART und dem Standardmodell ist Materie keine geometrische Eigenschaft der Welt, sondern eine eigenständige Entität, die sich im Raum bewegt. In einer finiten Geometrie folgt die Existenz von Materiefeldern aus den zusätzlichen Freiheitsgraden einer notwendig projektiven Geometrie (siehe **C**. unten und Kap. 4).
- Warum erfahren wir ein räumliches Kontinuum des Raumes? In der ART werden die Punkte  $P$  der kontinuierlichen Welt  $\mathbb{R}^d$  durch reelle Zahlen  $\mathbb{R}$  dargestellt, was ein Kontinuum unmittelbar impliziert. In einer finiten Geometrie entsteht eine scheinbare Kontinuität der Raumzeit nur auf großen Skalen (siehe Kap. 5).
- Warum zeigt die Materie Quanteneigenschaften, bzw. warum können Teilchen verschwinden oder entstehen und sich gegenseitig überlagern? Im Standardmodell muß zusätzlich angenommen werden, dass Teilchenfelder (12) ‚quantisiert‘ werden müssen d.h. mathematisch ausgedrückt, dass sie Operatoren  $\hat{\psi}(P)$  und nicht einfach klassische Felder  $\psi(P)$  sind. Niemand weiß allerdings, was dies für die Einstein-Gleichung (8) bedeuten soll, wenn links und rechts in der Gleichung mathematisch verschiedene Objekte stehen? In einer finiten Geometrie folgt die Quantisierung aller Teilchenfelder aus der

---

<sup>13</sup>Auch für kontinuierliche Mannigfaltigkeiten ist die Dimension  $d = 4$  ein Sonderfall: für  $d \leq 3$  sind sie stets geometrisierbar und für  $d \geq 5$  klassifizierbar.

geometrischen Struktur der Welt, die aus einer Raumzeit als Basis und Feldern als Fasern besteht. (siehe Kap. 6).

- Warum gibt es überhaupt eine Geometrie, bzw. wofür stehen ‚Punkte‘ und ‚Linien‘? In der ART wird der Raumzeit (nicht den Abständen in ihr) ontologisch Realität als eine topologische Mannigfaltigkeit zugesprochen. Der topologische Raum ist quasi eine präexistente Bühne, in der die Materie und die Metrik sich bewegt und alles Geschehen vor sich geht. Eine finite Geometrie erlaubt eine andere Ontologie, die einen Prozess von Ereignissen anstelle der Existenz von Dingen zum Grund der Welt erklärt, was der Erfahrung von Freiheit in einer offenen Zukunft besser entspricht (siehe Kap. 7).
- Wie kommt Neues in die Welt, bzw. welche zukünftigen Ereignisse sind durch die Geometrie der Welt festgelegt? Im Standardmodell sind die Teilchenfelder (12) eindeutig durch Anfangswerte bestimmt.<sup>14</sup> Ein Laplacescher Dämon kennt daher nicht nur die Vergangenheit sondern auch schon die Zukunft vollständig, bzw. die Wahrscheinlichkeiten aller möglichen Ereignisse. In einer finiten Geometrie von Ereignissen ist die Zukunft dagegen prinzipiell offen (siehe Kap. 7).

Um diese neuen Antworten geben zu können, müssen wir die Unterschiede zwischen kontinuierlichen und finiten Geometrien betrachten, da letztere interessante Alternativen zum Standardmodell bieten.

## Unterschiede kontinuierlicher und finiter Geometrien

Trotz der gemeinsamen Grundlage sind die beiden geometrischen Modelle, die kontinuierliche Mannigfaltigkeit  $\mathbb{R}^d$  und die endliche Punktmenge  $\mathbb{K}_p^d$ , in ihren Eigenschaften sehr verschieden. Ein wichtiges Beispiel dafür ist die Lösbarkeit der 2-dimensionalen quadratischen Gleichung  $x^2 + y^2 = -1$ . Sie ist mit reellen Zahlen  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$  nicht lösbar, wohl aber über endlichen Körpern  $(x, y) \in \mathbb{K}_p^2$ , so daß quadratische Formen  $Q$  in finiten Geometrien deutlich ‚größer‘ sind, d. h. mehr Punkte enthalten als in kontinuierlichen Geometrien. Die Bedeutung wird an drei geometrischen Fragen deutlich:

Warum können Kreise in Hyperbeln übergeführt werden? Weil  $x^2 + y^2 = -1$  lösbar in  $\mathbb{K}_p^2$  ist, gibt es Koordinatentransformationen, die eine jede quadratische Form in eine beliebige andere überführt und insbesondere auch die Transformation aller quadratischer Formen (6) in die kanonische Form (17) erlaubt.

Warum gibt es Kugeln in beliebigen Dimensionen? Weil  $x^2 + y^2 = -1$  keine Lösung im  $\mathbb{R}^2$  hat, sind lineare Unterräume in quadratischen Formen nicht erlaubt und ein Unterschied in der Dimension kontinuierlicher Räume nicht mehr vorhanden. Die Gleichung ist aber sehr wohl in Räumen über endlichen Körpern  $\mathbb{K}_p$  lösbar, was komplexere Formen von Quadriken in höheren Dimensionen zuläßt.

Warum sind Winkel zwischen Geraden nicht bereits durch Abstände zwischen Punkten festgelegt? Weil  $x^2 + y^2 = -1$  mehr Lösungen im  $\mathbb{K}_p^2$  als in  $\mathbb{R}^2$  hat, sind selbst bei festgehaltenen Abständen noch Transformationen der Richtungen möglich. So ist auch das Zentrum einer Ellipse nicht bereits durch die Ellipsenpunkte festgelegt wie in der euklidischen Ebene, sondern erst durch Definition von Winkeln zwischen Geraden.

---

<sup>14</sup>Diese determinierende Kausalität kommt von der globalen Hyperbolizität der relevanten partiellen Differentialgleichungen: Die Werte auf einer Cauchy-Hyperfläche der Raumzeit erlauben eindeutige Retrognosen und Prognosen.

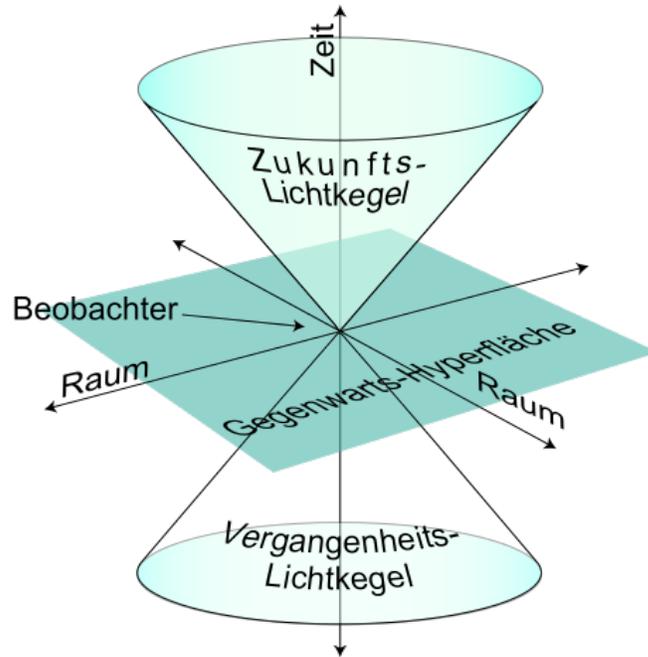


Abbildung 7: Ein Lichtkegel prägt der Welt eine kausale Struktur auf: er markiert (lokal) alle Punkte vergangener Ereignisse, die ein Lichtsignal an einen bestimmten Zeit- und Raumpunkt (‘hier und heute’) schicken kann. In der kontinuierlichen Raumzeit  $\mathbb{R}^{1+d}$  ist der (horizontale) räumliche Querschnitt notwendigerweise ein Kreis ( $d = 2$ ) bzw. eine Kugel für einen 3-dimensionalen Raum. In finiten Geometrien  $\mathbb{K}_p^d$  hat der räumliche Querschnitt aber für Dimensionen  $d \geq 4$  eine zylindrische Form und enthält auch ganze Dimensionen bzw. Raumrichtungen, die gar nicht mehr als Raum wahrgenommen werden können, da Raumzeitpunkte auf dem Lichtkegel nicht voneinander unterschieden werden können. (Quelle: [de.wikipedia.org/wiki/Lichtkegel](http://de.wikipedia.org/wiki/Lichtkegel))

Diese geometrische Struktur quadratischer Formen in finiten Geometrien ist der tiefere mathematische Grund, warum physikalische Aussagen über die Dimensionalität des wahrnehmbaren Raumes und die Existenz einer Zeitkoordinate möglich sind:

- A. Äquivalenz:** Während es in kontinuierlichen Geometrien verschiedene Typen von Quadriken gibt (Kegelschnitte wie Kreis, Ellipse, Hyperbeln), sind sie in finiten Geometrien stets hyperbelartig.<sup>15</sup> Man kann in finiten Geometrien  $\mathbb{K}_p^d$  stets ein solches Koordinatensystem verwenden, in dem die Menge aller Nachbarpunkte an Stelle der allgemeinen Form (6) die ‚kanonische‘ quadratische Form

$$s^2 = -p_0^2 + p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 \quad \text{bzw.} \quad s^2 = -t^2 + p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 \quad (17)$$

<sup>15</sup>Das Theorem von Sylvester über die Invarianz der Signatur einer quadratischen Form gilt nicht in finiten Geometrien, so dass alle quadratische Formen äquivalent und durch geeignete Koordinatentransformationen ineinander überführbar sind. Zwar kann auch der Charakter  $w = \{0, 1, 2\}$  einer Quadrik  $Q$  nicht verändert werden, in geraden Dimensionen  $d = 2n$  ist der Charakter aber stets  $w = 1$ , während man in ungeraden Dimensionen  $d = 2n + 1$  zwei Typen,  $w = 0$  und  $w = 2$  unterscheiden müßte. Insbesondere in 4 Dimensionen haben aber alle Quadriken den Charakter  $w = 1$  und damit eine Signatur  $(-+++)$  wie die Minkowski-Metrik, d. h. eine finite Welt hat notwendigerweise einen Lichtkegel.

mit  $s^2 = \pm 1$  erfüllt. Hier ist die Koordinate  $p_0$  ausgezeichnet, da sie die einzige mit einem Minuszeichen in der Form ist, weshalb sie ein eigenes Symbol  $t$  anstelle von  $p_0$  erhält und als ‚Zeitkoordinate‘ bezeichnet wird. Es ist allein dieses Minuszeichen, was die Zeit in der Relativitätstheorie vom Raum mit seinen drei Koordinaten  $p_1$ ,  $p_2$  und  $p_3$  unterscheidet. Allerdings muß die spezielle Signatur  $(-+++)$ , d.h. die Anzahl der negativen und positiven Vorzeichen in der quadratischen Form (17) postuliert werden und kann durch die Relativitätstheorie im Kontinuum nicht weiter begründet werden. In finiten Geometrie folgt dies dagegen aus der Äquivalenz aller quadratischen Formen.

**B. Existenz von Eikörpern:** Während in kontinuierlichen Geometrien  $\mathbb{R}^d$  es stets auch ‚eiförmige‘ Quadriken (Kreis, Ellipse, Kugel,...) gibt, enthalten sie in finiten Geometrien  $\mathbb{K}_p^d$  immer auch ganze Geraden, wenn die Dimension der Welt größer als 3 ist. Das bedeutet insbesondere, dass der Lichtkegel (siehe Abb. 7) in höheren Dimensionen keine (sphärischen) ‚Kegel‘ mehr sind, sondern (zylindrische) ‚Keile‘, die ganze lineare Unterräume enthalten, die alle weiteren als die drei bekannten Raumdimensionen ‚verschlucken‘.<sup>16</sup> In anderen Worten, die Punkte in höheren Raumdimensionen haben keinen Abstand voneinander und können gar nicht räumlich unterschieden werden, da sie alle ‚lichtartig‘ miteinander verbunden sind. Höhere Dimensionen ‚vergrößern‘ daher nur den Lichtkegel, nicht aber den Raum außerhalb von ihm.

**C. Winkelmaße:** Während in kontinuierlichen Geometrien  $\mathbb{R}^d$  mit der Quadrik  $Q$  nicht nur Abstände zwischen Punkten, sondern stets auch Winkel zwischen Geraden und Ebenen festgelegt sind, müssen diese in finiten Geometrien  $\mathbb{K}_p^d$  durch die Bestimmung von ‚Nachbarlinien‘ und ‚Nachbarebenen‘ extra definiert werden. Mit anderen Worten, es gibt nicht nur eine Quadrik  $Q$  für Punkte, sondern eine ganze Sequenz von Quadriken  $Q^k$ , die die Anordnung von Geraden ( $k = d - 1$ ), Ebenen ( $k = d - 2$ ) und Räumen ( $k = d - 3$ ) bestimmt.<sup>17</sup> Die Anordnung von Nachbarschaft ist deswegen in finiten Geometrien aufwendiger, weil die möglichen Symmetrie-Transformationen des Raumes nicht durch weitergehende Kontinuumsannahmen eingeschränkt sind und die ordnungserhaltenden Transformationen erst durch Quadriken  $Q^k$  definiert werden müssen. Es bietet sich an, allen parallelen Geraden einen gemeinsamen ‚Punkt im Unendlichen‘ zuzuordnen und die Menge  $\mathbb{K}_p^{d-1}$  aller dieser ‚Unendlichkeits-Punkte‘ zu den ‚normalen‘ Punkten  $\mathbb{K}_p^d$  hinzuzunehmen. Genauso kann man alle parallelen  $(d - k)$ -dimensionalen Ebenen durch zusätzliche Punkte  $\mathbb{K}_p^k$  repräsentieren, so dass die finite Geometrie  $\mathbb{K}_p^d$  eigentlich ein größerer Raum, der sogenannte *projektive Raum*

$$\mathfrak{P}\mathbb{K}_p^d = \mathbb{K}_p^d \cup \mathbb{K}_p^{d-1} \cup \dots \cup \mathbb{K}_p^1 \quad (18)$$

ist (siehe Abbildung 9), wobei jeder Unterraum  $\mathbb{K}_p^k$  durch eine eigene Quadrik  $Q^k$  für die notwendige Festlegung von Nachbarschaften der  $(d - k)$ -dimensionalen Ebenen strukturiert ist.

Es ist etwas ungewöhnlich, sich vorzustellen, dass der so anschauliche Euklidische Raum  $\mathbb{R}^d$  mathematisch betrachtet eigentlich eine hochspezialisierte Geometrie mit vielen zusätzlichen

<sup>16</sup>Der projektive Index  $g(Q)$  einer quadratischen Form gibt die maximale Dimension der Unterräume in  $Q$  an und ist in finiten Geometrien  $\mathbb{K}_p^d$  durch  $g(Q) = (w + d - 3)/2$  gegeben mit dem Charakter  $w = \{0, 1, 2\}$  einer Quadrik  $Q$ . Für  $d \geq 4$  ist  $g \geq 1$ , so dass kein Eikörper (ohne ganze Unterräume) mehr existiert.

<sup>17</sup>Die Isometriegruppe einer reellen Metrik ist stetig, während in finiten Geometrien eine Permutation von Linien und Hyperebenen (gerade, d.h. lineare Unterräume) möglich ist, deren Anordnungen daher durch zusätzliche (entartete) quadratische Formen festgelegt werden müssen.

Annahmen über den Zusammenhang (Topologie), die Abstände (Metrik) und Ordnung der unendlich vielen Punkte ist, die viele geometrische Aspekte einer Menge  $\mathbb{K}_p^d$  von endlich vielen Punkte schlicht zum Verschwinden bringen. Die wenigen und einfachen Annahmen (i)-(iv) über die Nachbarschaft endlich vieler Punkte erlauben dagegen noch Eigenschaften, die spezifische Unterschiede z. B. in verschiedenen Dimensionen möglich machen.

## Existenz des Lichtkegels: Dimensionalität von Raum und Zeit

Alle Metriken  $g_{\mu\nu}$  weisen in finiten Geometrien also notwendigerweise genau eine Zeitkoordinate auf und sind darüberhinaus äquivalent, d. h. unterscheiden sich nur durch die Konvention, welche Koordinatenwerte den Punkten zugeordnet werden. In dieser Welt gibt es offensichtlich Punkte, die den Abstand  $s = 0$  vom Ursprung  $O$  bei  $t = 0$  und  $p_1 = p_2 = p_3 = 0$  haben. Man nennt sie den *Lichtkegel*, da er die Orte im Raum angibt, die ein Lichtblitz im Ursprung durchlaufen würde. Zu jedem Zeitpunkt  $t$  ist es eine Kugel im Raum mit Radius  $p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 = t^2$ , die also im Laufe der Zeit konzentrisch anwächst. In Abbildung 7 ist ein Vergangenheits-Lichtkegel gezeigt, der alle Punkte angibt, in denen ein Lichtblitz ausgesendet einen bestimmten Ort zu einer bestimmten Zeit (‚hier und heute‘) erreicht.

Mathematisch drückt sich die Äquivalenz aller quadratischen Formen darin aus, dass man durch eine einfache Wahl geeigneter Koordinaten  $p_\mu$  jede Quadrik anstelle der Matrixform (7) in die *Minkowski-Einheitsmatrix*

$$I_- = \begin{pmatrix} -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \quad (19)$$

bringen kann, d. h. dass die Komponenten der Metrik  $g_{ij}$  in der Matrix (7) alle Null sind bis auf die Diagonalelemente  $g_{00} = -1$ ,  $g_{11} = 1$ ,  $g_{22} = 1$ ,  $g_{33} = 1$ . Die notwendige Existenz eines Lichtkegels liegt an dem Minuszeichen im ersten linken oberen Eintrag, weshalb wir dieses wichtige Vorzeichen auch im Index von  $I_-$  vermerken im Unterschied zur Standard-Einheitsmatrix  $I_+$ , bei der nur positive Einser auf der Diagonale stehen.

Die drei geometrischen Unterschiede A-C erlauben nun eine logisch stringente Argumentation, dass ein Weltmodell, das auf einer Geometrie endlich vieler Punkte beruht, notwendigerweise

- A. genau eine Zeitdimension** und damit einen Lichtkegel enthält;
- B. höchstens drei Raumdimensionen** zeigt, da jede höhere Raumdimension in finiten Geometrien vom sogenannten Lichtkegel ‚verschluckt‘ wird und daher als Raum nicht sichtbar ist;
- C. projektiv** mit zusätzlichen Freiheitsgraden in Geraden- und Ebenenanordnungen ist, die als Materie- bzw. Eichfelder interpretierbar sind.

In Abbildung 9 ist eine solche 2-dimensionale finite Geometrie gezeigt, die aus 49 Weltpunkten, einem 2-dimensionalen Lichtkegel (zwei Geraden aus gelben Punkte) und projektiven Freiheitsgrade als Punkte im ‚Unendlichen‘ (außerhalb des Punktequadrates) zeigt.

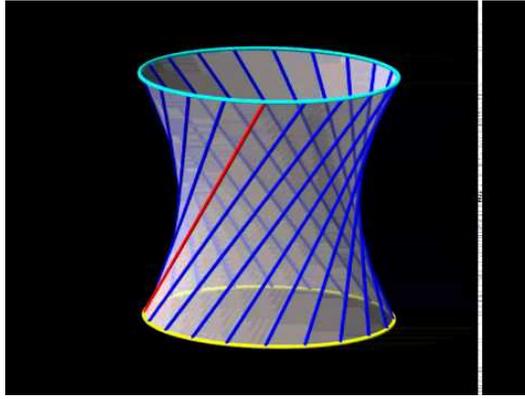


Abbildung 8: Ein Hyperboloid besteht aus Geraden, die ‚gekippt‘ im Kreis herumgeführt werden. Während in kontinuierlichen Geometrien es in jeder Dimension Kugeln unter den Kegelschnitten gibt, in denen keine Geraden eingebettet sind, enthalten in finiten Geometrien für  $d > 3$  quadratische Formen stets lineare Unterräume. Durch eine geeignete Wahl von Koordinaten, können daher im Lichtkegel ganze Unterräume identifiziert werden, was für eine Begründung der **Dreidimensionalität des Raumes** herangezogen werden kann.

## 4 Ursprung der Materie: Vielfalt einer inhomogenen Welt

Scheinbar ist Farbe, scheinbar Süßigkeit, scheinbar Bitterkeit:  
wirklich nur Atome und Leeres.  
Demokrit, *Fragment 125*

Die Annahme endlich vieler Punkte ist wohl das einfachste geometrische Modell, das die Grundeigenschaften einer geordnet zusammenhängenden Welt erfüllt. Eine notwendige logische Konsequenz der vier oben genannten Annahmen **(i)**-**(iv)** ist, dass die Welt aus drei Raumdimensionen und einer Zeitdimension besteht - mehr ist bisher nicht gefolgert, insbesondere wissen wir noch nichts über die möglichen Eigenschaften von Materie in dieser Welt. Seit der Antike mit den Atomisten Leukip und Demokrit von Abdera wurde die Materie von Zeit und Raum getrennt, der nur als leerer Behälter vorgestellt wurde, in dem sich punktförmige Teilchen bewegen und damit die Vielfalt der Erscheinungen der Materie hervorbringen. Heisenberg meint, dass die moderne Physik diesen Grundgedanken teilt, und stellt durchaus bedauernd fest:

Die alte großartige Idee, daß Raum und Zeit gewissermaßen von der Materie aufgespannt und mit ihr wesensgleich seien, hat in der Demokritischen Lehre keinen Platz.

Das scheint allerdings etwas kurzgeschlossen, da man sehr wohl versuchen kann, Raum, Zeit und Materie gemeinsam zu beschreiben, wenn man die Interpretation der atomaren Teilchen als *Substanzen* hinter sich läßt und sie mehr als elementare Bestandteile einer geometrisch strukturierten Welt versteht.

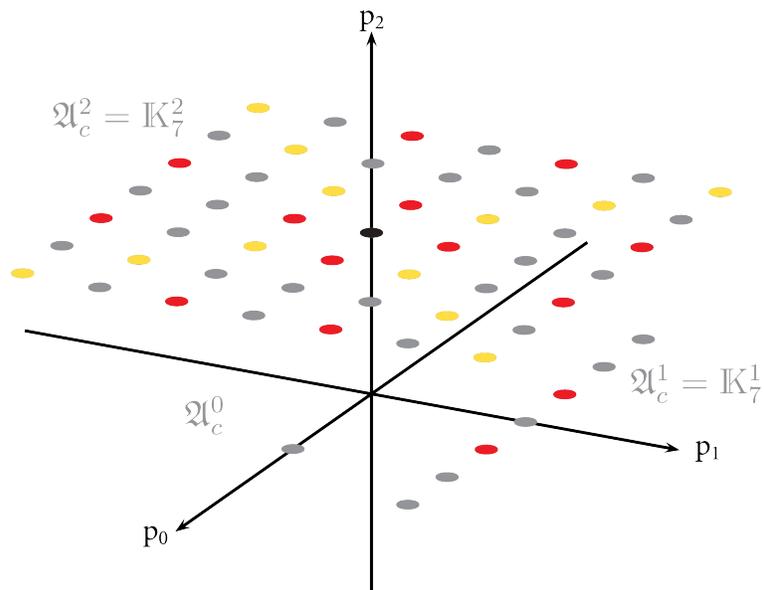


Abbildung 9: Eine 2-dimensionale finite Geometrie  $\mathbb{K}_p^2$  kann man sich als ein Quadrat von  $p^2$  Punkten vorstellen (hier  $p = 7$ ). Der Lichtkegel zum zentralen Punkt („hier und heute“) besteht aus den zwei Geraden aus gelben Punkten, die ein 2-dim. Schnitt des in Abb. 7 gezeigten 3-dim. Lichtkegels sind. Die Quadrik (Nachbarnpunkte zum Zentrum), d. h. die Lösungsmenge der quadratischen Gleichung  $1 = -p_0^2 + p_1^2$  (siehe Gl. (17) für  $d = 2$ ) sind als rote Punkte eingezeichnet. In einer finiten Ebene müssen nicht nur die Punkte, sondern auch die Geraden explizit angegeben werden (siehe C.): sie werden hier durch zusätzliche Punkte „außerhalb“ des Quadrates der  $n^2$  Weltpunkte symbolisiert. (Quelle: Alexander Laska)

## Wechselwirkungen: Nachbarschaftssymmetrie

Geht man davon aus, dass die Welt von jedem Punkt aus betrachtet „gleich“ aussieht, dann wäre sie tatsächlich ziemlich einfach und vor allem leer. Diese Annahme der Gleichheit in jedem Punkt ist aber gar nicht notwendig, denn mit den vier obigen Annahmen ist es durchaus verträglich, dass die Nachbarschaftsordnung an jedem Punkt eine andere ist. Denn die Festlegung von Nachbarn legt nicht die weiteren Nachbarpunkte der Nachbarn fest. Mit anderen Worten, man kann in jedem Punkt  $P$  eine andere Quadrik (quadratische Form)  $Q(P)$  haben, die seine Nachbarpunkte festlegt, ein sogenanntes *Quadrik-Feld*  $Q(P)$ . In der Physik spricht man seit Michael Faraday von einem „Feld“ wenn eine physikalische Größe - wie bei einem „Getreidefeld“ oder wie bei dem in Abb. 13 gezeigten „Faserbündel“ - sich in jedem Ort  $P$  befindet. So hat z. B. das elektromagnetischen Feld  $\vec{E}(P)$  in jedem Punkt  $P$  eine Feldstärke  $\vec{E}$ , das u. a. eine Kraft auf eine Ladung ausübt, die sich in  $P$  befindet. Wie bei einem Getreidefeld kann ein physikalisches Feld „gleichmäßig geordnet“ oder wild durcheinandergewirbelt sein. Nun ist aber nicht jede beliebige Nachbarschaftsordnung an jedem Punkt möglich, da sonst alles in unabhängige Punkte zerfallen und gar nichts zusammenhängen würde. Es ist sinnvoll, eine Symmetrie der Nachbarschaftsbeziehung als fünfte Annahme zu fordern:

- (v) ein Nachbarpunkt eines Punktes hat als Nachbar auch diesen Punkt.

Umgangssprachlich bedeutet dies, dass man immer der Nachbar seines Nachbarn ist. So selbstverständlich diese Annahme klingt, so weitreichend ist ihre Konsequenz: sie impliziert, dass

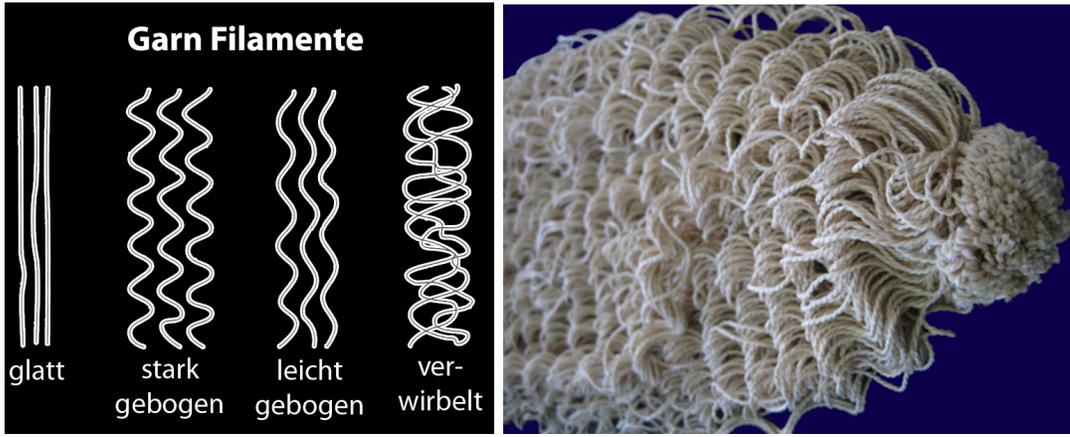


Abbildung 10: Die Überlagerung von Fäden zu einer texturierten Welt, um bestimmte physikalische Erscheinungsformen zu erzeugen, ist bei Stoffen ein altbekanntes Verfahren (Quelle: [de.wikipedia.org/wiki/Texturierung](http://de.wikipedia.org/wiki/Texturierung)).

die Quadriken ‚zusammenhängen‘, die Materiefelder untereinander wechselwirken, was symbolisch durch die *Wechselwirkungsrelation*

$$P = Q \circ Q(P) \quad (20)$$

geschrieben werden kann. Die Verknüpfung  $Q \circ Q$  bedeutet, dass der Schritt zum nächsten Nachbarn ( $\in Q$ ) auf der gleichen Linie wiederholt wird - allerdings in die umgekehrte Richtung, d.h. eine involutive Hintereinanderausführung darstellt. Nur aufgrund der Annahme **(v)** gibt es ein *Netzwerk* von Nachbarschaftsbeziehungen.

Ein wichtiger Test der Annahme **(v)** wäre, sie als das finite Analogon der Einsteingleichung (8) und des Energie-Impuls-Tensors (11) im Standardmodell zu zeigen. Zuerst müßte die Beziehung (9) geklärt werden, d.h. die genaue Funktion  $\mathcal{G}[\cdot]$  zwischen der Metrik  $g_{\mu\nu}$  - gegeben durch eine Quadrik in der finiten Geometrie - und dem Einsteinschen Krümmungstensor  $G_{\mu\nu}$  der kontinuierlichen Raumzeit hergeleitet werden (siehe **S1** auf Seite 59). Zweitens müßte dann zudem der Energie-Impuls-Tensor  $T_{\mu\nu}$  durch die Freiheitsgrade einer Quadrik  $Q(P)$  ausgedrückt werden, d.h. die genaue Funktion  $\mathcal{T}[\cdot]$  in einer finiten Geometrie abgeleitet werden (siehe **S3**). Dies ist gerade die Aufgabe, vor der die Forschung zu finiten Weltmodellen steht und die im Abschnitt 5 über den Kontinuumsimes ausführlicher diskutiert wird. Niemand weiß zum jetzigen Zeitpunkt, ob dies gelingt, oder ob die Annahme **(v)** durch eine andere ersetzt, oder gar der ganze finite Ansatz modifiziert werden muß. Die Funktionen  $\mathcal{G}[\cdot]$  und  $\mathcal{T}[\cdot]$  sind zwei der momentan fehlenden Puzzelsteinchen, deren Fehlen das Scheitern des ganzen Ansatzes bedeuten würde. Die weiteren Schritte **S1-S3** für einen Test des finiten Weltmodells werden wir unten auf S. 59 im Kapitel ‚Auf dem Weg zum Standardmodell‘ diskutieren.

## Linearisierung der Wechselwirkung: elementare Wellenfunktionen

Das hier vorgestellte Weltmodell beruht einzig auf der Strukturierung von Punkten durch quadratische Formen, dem Feld von Quadriken  $Q(P)$ , das die Nachbarschaft jeden Punktes  $P$  angibt. Die sogenannte ‚Feldtheorie‘ der Physik versucht, die möglichen Konfigurationen von physikalischen Feldern zu beschreiben, die Felder  $Q(P)$  möglichst vollständig zu klassifizieren.

Eine elegante Methode dafür stellt die ‚Linearisierung‘ von quadratischen Formen dar. Aus der Äquivalenz aller quadratischen Formen (siehe A. oben) folgt, dass diese Quadriken

$$Q(P) = \Psi^t(P)I_- \Psi(P) \quad (21)$$

durch eine Transformationsmatrix (Projektivität)  $\Psi(P)$  dargestellt werden können, die quasi die ‚Wurzel‘ der quadratischen Form  $Q(P)$  ist.<sup>18</sup> Mathematisch sind die Wurzeln  $\Psi(P)$  wie die Quadrik (7) eine Matrix, d. h. ein quadratisches Schema. Dieses kann als eine lineare Abbildung eines Punktes  $X \in \mathfrak{P}\mathbb{K}_p^d$  d. h. eines linearen Schemas (2) auf einen anderen Punkt  $X' = \Psi(P)X$  verstanden werden kann:

$$\Psi(P) : \mathfrak{P}\mathbb{K}_p^d \rightarrow \mathfrak{P}\mathbb{K}_p^d \quad \text{mit} \quad \Psi(P) \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x'_0(P) \\ x'_1(P) \\ \vdots \\ x'_d(P) \end{pmatrix}. \quad (22)$$

Anschaulich stellen die Transformationsmatrizen  $\Psi(P)$  eine ‚Deformation‘ der kanonischen Form (17) dar, analog wie im Anschauungsraum eine Ellipse ein ‚deformierter‘ Kreis ist. Die Punkte  $X$  des Kreises werden dabei durch  $\Psi(P)$  auf Punkte  $X'(P)$  einer Ellipse mit Mittelpunkt  $P$  ‚verschoben‘.

Die Stärke der mathematischen Sprache ist neben ihrer Exaktheit, die Fähigkeit einfache Verfahren zu verallgemeinern und dadurch neue Beschreibungsmöglichkeiten zu schaffen. Das Ziehen der Wurzel einer Zahl ist von der elementaren Schulmathematik vertraut; die Erweiterung des Konzeptes auf andere mathematische Objekte als einfachen Zahlen war oft ein wichtiges Erkenntnismittel. Bereits Paul Dirac stand 1928 bei der Formulierung einer relativistischen Quantentheorie vor dem Problem eine ‚Wurzel‘ aus einer quadratischen (Dispersions-)Relation zu ziehen, was ihn mit Hilfe von Gamma-Matrizen zur Formulierung der berühmten Dirac-Gleichung für elementare Teilchen führte und ihn motivierte, die Existenz von ‚Antimaterie‘ wegen der zusätzlichen (symmetrischen) Lösungen zu postulieren. Auf diese ‚Linearisierung‘ der quadratischen Nachbarschaftsordnung **(iv)** bzw. der Quadrik  $Q(P)$  durch  $\Psi(P)$  werden wir im Kapitel 6 über Quantenphänomene zurückkommen und eine Erklärung der sogenannten Bornschen Regel (54) für die Wahrscheinlichkeitsinterpretation des Betragsquadrats  $|\psi|^2$  einer komplexen Wellenfunktion  $\psi \in \mathbb{C}$  versuchen. Denn auch die komplexen Zahlen  $\mathbb{C}$  kommen in die Physik durch das Problem, für die Darstellung der Wellenfunktionen eine Wurzel von der negativen Einheitszahl  $-1$  ziehen zu müssen, um sogenannte ‚unitäre Transformation‘ eines physikalischen Zustandes zu erlauben. Zunächst müssen wir aber klären, was die ‚Wurzeln‘  $\Psi(P)$  einer Quadrik  $Q(P)$  physikalisch bedeuten.

Wieviele verschiedene Nachbarschaftsordnungen gibt es, die eine durch die Einheitsquadrik (19) gegebene, homogene Ordnung stören? Hier impliziert die Geometrie endlich vieler Punkte eine eindeutige Antwort:<sup>19</sup> Da die Ordnung nicht nur von 0-dimensionalen Punkten ( $d-k=0$ ),

<sup>18</sup>Die Verknüpfung ist die übliche Matrixmultiplikation mit der Minkowski-Einheitsquadrik  $I_-$  in Gl. (19), d. h. eine Koordinatentransformation mit  $\Psi(P)$ . Eine beliebige Quadrik  $Q$  ist durch  $p+1$  Punkte und eine Projektivität  $\Psi$  durch  $d+2$  Bildpunkte eindeutig festgelegt (*Hauptsatz der projektiven Geometrie*). Die zusätzlichen Freiheitsgrade in  $\Psi$  erlauben Isometrien wie Translationen mit Tilt (Eichtransformationen) und Lorentz-Transformationen.

<sup>19</sup>Die Symmetriegruppe  $PGL(d, \mathbb{K})$  der  $d$ -dimensionalen projektiven Geometrie besteht im wesentlichen aus der allgemeinen linearen Gruppe  $GL(d+1, \mathbb{K})$  der regulären  $(d+1) \times (d+1)$ -Matrizen. Diese läßt sich neben den Translationen und Lorentz-Transformationen vor allem in  $k$ -dimensionale Tilt-Transformationen zerlegen, wobei  $k$  die Dimension des Darstellungsraumes der dazugehörigen Materiefelder ist: Spinoren ( $k=4$ ), Quarkfarben ( $k=3$ ), Isospin ( $k=2$ ) und Ladung ( $k=1$ ).

sondern auch von 1-dimensionalen Linien ( $d-k=1$ ), 2-dimensionalen Ebenen ( $d-k=2$ ) und 3-dimensionalen Räumen ( $d-k=3$ ) gestört werden kann, kann man die Inhomogenitäten

$$Q^k(P) = \Psi^{k^t}(P) I_-^k \Psi^k(P) \quad (23)$$

in Gl. (21) mit der  $k$ -dimensionalen Einheitsquadrik  $I_-^k$  danach klassifizieren, welche Quadrik  $Q^k$  in der Sequenz (18) von  $k$ -dimensionalen Unterräumen  $\mathbb{K}_p^k$  betroffen ist, wobei  $\Psi^k(P)$  nur in  $\mathfrak{B}\mathbb{K}_p^k$  operiert. Die Störung  $\Psi^1(P)$  von  $Q^1$  kann durch eine 1-komponentige Funktion  $e(P)$  parametrisiert werden, von  $\Psi^2(P)$  zusätzlich durch eine 2-komponentige Funktion  $\nu_l(P)$ , von  $\Psi^3(P)$  zusätzlich durch eine 3-komponentige Funktion  $q_j$  und von  $\Psi^4(P)$  zusätzlich durch eine 4-komponentige Funktion  $\psi_i$ . Diese Funktionen entsprechen gerade den beobachtbaren Typen **F1-F4** von Teilchenfeldern  $\psi$  in Gl. (12), die nun aber eine rein geometrische Bedeutung erhalten:

- F4:** 4-komponentiges ‚Spinor-Feld‘  $\psi_i(P)$  legt die Quadrikpunkte  $Q^4(P)$  und damit in jedem Punkt  $P$  eine Nachbarrelation als Ordnung fest;
- F3:** 3-komponentiges ‚Quark-Feld‘  $q_j(P)$  legt die Nachbarlinien  $Q^3(P)$  in  $P$  fest und definiert damit im affinen Raum parallel gemäß  $\Psi^4(P)$  für alle Linie  $L$  durch  $P$  ihre Winkel zueinander;
- F2:** 2-komponentiger ‚Isospin-Feld‘  $\nu_l(P)$  legt die Nachbarbenen  $Q^2(P)$  in  $P$  fest und bestimmt damit wie Ebenen zueinander orientiert sind;
- F1:** 1-komponentiges ‚Ladungs-Feld‘  $e(P)$  legt  $\Psi^1(P)$  und damit die Zeitachse im Verhältnis zum Raum in der Welt fest.

Zusammenfassend kann man die Teilchenfelder wie die Quadrik  $Q$  in Gl. (7) in ein quadratisches Schema (22), eine Transformationsmatrix

$$\Psi(P) = \begin{pmatrix} h_0 & -\psi_1 & -\psi_1 & -\psi_3 & -\psi_4 \\ \psi_1 & h_1 & q_3 & q_2 & q_1 \\ \psi_2 & q_1 & h_2 & q_3\nu_2 & q_2\nu_1 \\ \psi_3 & q_2 & q_1\nu_1 & h_3 & q_3\nu_2e \\ \psi_4 & q_3 & q_2\nu_2 & q_1\nu_1e & h_4 \end{pmatrix} \quad (24)$$

ordnen. Die Anordnung der Teilchenfelder folgt einem bestimmten Schema, den Lichtkegel- und Ladungeigenzustandskoordinaten, das unten durch die fundamentalen Wechselwirkungssymmetrien  $G(k)$  erklärt wird. Wir können aber jetzt schon ein paar Spezialfälle erkennen:

- Leptonen:  $q_1 = q_2 = q_3$  (Farb-Singulett), so dass  $\Psi(P)$  farbneutral und invariant unter  $G(3)$  ist;
  - rechtshändiges Elektron:  $\nu_1 = \nu_2$  (Isospin-Singulett), so daß  $\Psi(P)$  nur geladen ist, da  $\Psi(P)$  invariant sowohl unter  $G(3)$  als auch  $G(2)$  ist;
  - linkshändige Leptonen:  $\nu_1 \neq \nu_2$  (Isospin-Dublett), so daß  $\Psi(P)$  nicht invariant  $G(2)$  ist;
  - Neutrinos:  $e = 0$  wechselwirkt nur schwach, da elektromagnetisch neutral;
- Quarks:  $q_1 \neq q_2 \neq q_3$  (Farb-Triplett) tragen ‚nur‘ Drittelladung, da  $q_2$  nicht an  $e$  koppelt;

- Dunkle Materie:  $q_j = 0$ ,  $\nu_l = 0$ ,  $e = 0$  beschreibt ein Teilchen mit Spinor  $\psi_i \neq 0$ , dass aber keinerlei Ladungen trägt und daher mit keinem anderen Teilchen wechselwirkt.

Wenn  $\Psi(P)$  zu einem Nachbarpunkt  $P \in Q(X)$  von  $X$  transformiert, dann sind die Teilchenfelder notwendigerweise normiert,

$$\vec{\psi}^2 = 1, \quad \vec{q}^2 = c_1^2, \quad \vec{\nu}^2 = c_2^2, \quad e^2 = c_3^2, \quad (25)$$

wobei die Kopplungskonstanten  $c_i$  (Ladungen wie z. B.  $c_3 = e$ ) die raumartigen Abstände in der komplementären Quadrik  $Q^-$  festlegen, wobei die Normierung für  $\vec{\psi}$  immer auf 1 gesetzt werden kann. Allerdings können für andere Punkte  $P$  andere ‚invariante Massen‘  $h_i$  auftreten, so dass die *Massen-Dispersionsrelationen*

$$\vec{\psi}^2 = h_0^2, \quad \vec{q}^2 = h_1^2, \quad \vec{\nu}^2 = h_2^2, \quad e^2 = h_3^2 \quad (26)$$

gelten, wobei das Higgs-Feld  $h_i$  immer so normiert werden kann, dass  $h_i(X) = 1$  und  $h_4 = 1$  ist (Normierung einer Projektivität). Das Higgs-Teilchen ist besonders, da es nur ‚auf der Diagonale lebt‘ und daher weder Spin, noch Ladungen trägt und mit den anderen Teilchen nur durch die Dispersionsrelation (26) über die Masse koppelt.

Die im Standardmodell per Hand eingeführten Teilchenfelder (12) sind nach dieser geometrischen Deutung daher nicht etwas, was zusätzlich zu Raum und Zeit hinzukommt und sich in ihnen verändert, sondern sie drücken gerade durch die Transformationsmatrix  $\Psi(P)$  (bzw. durch das in (21) bestimmte Quadrikfeld  $Q(P)$ ) die Struktur von Raum und Zeit aus: das Vorhandensein von Teilchen ist eigentlich nur eine bestimmte Textur der jeweiligen Anordnung von Punkten, Geraden und Ebenen. Ihre physikalischen Eigenschaften wie z. B. ihre Ladung, Masse oder Spin sind dann bestimmte geometrische Parameter dieser Störung einer homogenen Weltstruktur, deren Werte aus den geometrischen Annahmen **(i)**-**(v)** abgeleitet werden können. Diesen wichtigen Test des finiten Weltmodells werden wir unten im Kapitel 8 „Auf dem Weg zum Standardmodell“ unter den Punkten **W1-W8** weiter diskutieren. Auch wenn dieser Test noch nicht bestanden wurde, eröffnet dieses finite Weltmodell neue Denkmöglichkeiten: wie bei Textilien durch Kräuselung der Fasern sehr verschiedenes Aussehen erzielt werden und selbst Kunststoffe den Charakter von Naturfasern erhalten können, so wird die Strukturierung der Weltpunkte als vielfältige Erscheinungsweisen der Materie wahrgenommen. Hingegen ist in kontinuierlichen Geometrien diese Bedeutung von Teilchenfeldern (12) gar nicht möglich, da die Struktur der Welt bereits durch eine Metrik  $g_{\mu\nu}$  eindeutig festgelegt ist (siehe den Unterschied C. Winkelmaße auf S. 21 in dem Abschnitt über die Unterschiede kontinuierlicher und finiter Weltmodelle). Dies genügt, um in der Allgemeinen Relativitätstheorie die Gravitation als geometrischen Effekt zu beschreiben, für die Erklärung der anderen Teilchen mit ihren Kräften bzw. Wechselwirkungen sind in kontinuierlichen Welten aber keine Freiheitsgrade mehr übrig, da die zusätzlichen Quadriken  $Q^k(P)$  im Unendlichen mit ihren Störungen  $\Psi^k(P)$  nicht (unabhängig) vorhanden sind.

Doch wo finden sich in finiten Geometrien die in Abbildung 5 aufgeführten Eichbosonen: die Gluonenfelder  $g_\mu^i(P)$ , schwachen Vektorfelder  $W_\mu^\pm(P)$  und  $Z_\mu^0(P)$  sowie das Photonenfeld  $\gamma_\mu(P)$ ? Hermann Weyl meinte in seinem Buch *Raum - Zeit - Materie* von 1918, dass die Allgemeine Relativitätstheorie strikter lokalisiert werden mußte, als das Einstein getan hat, indem auch der Paralleltransport in jedem Punkt definiert wird und invariant unter Eichtransformationen formuliert werden mußte. Er erkannte, dass das Photonenfeld  $\gamma_\mu(P)$  dann als ein notwendiges *Eichfeld* (14) zur komplexwertigen Wellenfunktion angesehen werden muß [9]:

$\psi$  übernimmt jetzt die Rolle, welche in jener alten Theorie das Einsteinsche  $ds$  spielte. Es scheint mir darum dieses nicht aus der Spekulation, sondern aus der Erfahrung stammende neue Prinzip der Eichinvarianz zwingend darauf hinzuweisen, daß das elektrische Feld ein notwendiges Begleitphänomen nicht des Gravitationsfeldes, sondern des materiellen, durch  $\psi$  dargestellten Wellenfeldes ist.

Um dies zu verstehen, müssen wir auf ein wichtiges Prinzip der Physik zu sprechen kommen, das für die Feldtheorie im 20. Jahrhundert leitend war: die **Symmetrien** physikalischer Gesetzmäßigkeiten insbesondere der Eigenschaften der elementaren Teilchen in Abbildung 5. Es war neben Felix Klein und Emmy Noether vor allem Hermann Weyl, der die Bedeutung von Symmetrien in der Physik erkannte und deswegen 1925 eine Darstellungstheorie der kontinuierlichen Lie-Gruppen entwickelte, insbesondere der unitären und orthogonalen Gruppen, die für die Eichsymmetrie (15) des Standardmodells zentral wurde.

## Symmetrie: Translationen, Eich- und Lorentztransformationen

Bereits bei der mathematischen Bestimmung der Nachbarschaftsrelation in Gl. (4) haben wir ausgenutzt, dass die Lösung einer quadratischen Gleichung *zwei* Lösungen haben kann. So kann z. B. die Lösung von  $x^2 = 1$  sowohl  $x = 1$  als auch  $x = -1$  sein. Mit anderen Worten legt eine quadratische Gleichung die Lösung nicht eindeutig fest, sondern läßt eine Wahl zwischen zwei ‚gleichen‘ Lösungen. Natürlich sind die zwei Lösungen nicht gleich, sondern gemeint ist ‚gleichwertig‘, da sie durch die sie bestimmende Gleichung nicht unterschieden werden. Die quadratische Gleichung (21) ist komplizierter als  $x^2 = 1$ , da die mathematischen Objekte nicht einfache Zahlen  $x$  sind, sondern es sich bei  $Q$  und  $\Psi$  um Matrizen wie das in Gl. (7) dargestellte Schema handelt. Deswegen ist die Menge gleichwertiger Lösungen auch deutlich größer und besteht aus den sogenannten *Isometrien*  $\Psi_0$ , die die ‚Einheitsgleichungen‘

$$I_- = \Psi_0^t I_- \Psi_0 \quad (27)$$

erfüllen, wobei links die Minkowski-Einheitsquadrik (19) steht, die bei Matrizen der 1 bei Zahlen entspricht.<sup>20</sup> Eine Lösung  $\Psi_0$  dieser quadratischen Gleichung gibt eine Transformation des Koordinatensystems an, die die quadratische Form  $Q$  in Gl. (6) und damit die Nachbarschaftsrelation (iv) nicht ändert. Anschaulich entspricht eine solche Symmetrie-Transformation einer Quadrik der Drehung eines Kreises im kontinuierlichen Anschauungsraum, d. h. einer Transformation des Kreises, die seine Form nicht verändert, ihn z. B. nicht in eine Ellipse deformiert, was eine beliebige Transformationsmatrix  $\Psi$  tun würde. Die Menge solcher gleichen Lösungen  $\Psi_0$  bilden die *Symmetriegruppe* der Welt

$$\mathcal{S} = \{ \Psi_0 \mid \Psi_0^t I_- \Psi_0 = I_- \} , \quad (28)$$

die alle Abbildungen enthält, die Nachbarn eines Punktes nur auf andere Nachbarn abbilden. Die Anzahl dieser Isometrien ist nun nicht zwei wie bei  $x^2 = 1$ , sondern sehr groß und beinhaltet nicht nur Rotationen des Raumes, sondern auch sogenannte Lorentz-Transformationen und Translationen mit Tilt (Eichtransformationen), auf die wir am Ende von Kapitel 5 genauer zu sprechen kommen, da sie für das symmetrische Schema der Elementarteilchen in Abbildung

---

<sup>20</sup>Diese Gleichung muß in projektiven Räumen mit homogenen Koordinaten nur bis auf einen konstanten Faktor  $N$  erfüllt sein, d.h.  $N I_- = \Psi_0^t I_- \Psi_0$  mit  $N \in \mathbb{K}_n$ . Dies wird für die Quantisierung eine wichtige Rolle spielen, da  $N$  eine ‚Besetzungszahl‘ darstellt.

5 verantwortlich sind.<sup>21</sup> Die Existenz solcher Symmetrie-Transformationen  $\Psi_0$  liegt im finiten Weltmodell also allein an der quadratischen Struktur (6) der Nachbarschaftsbeziehung (**iv**), die viele Linearisierungen durch Transformationen  $\Psi$  als Lösungen von Gl. (21) erlaubt.

## Lorentz- und Eichtransformationen

Ohne in die Details der Klassifizierung dieser Symmetrie-Transformationen  $\Psi_0$  zu gehen, müssen für das weitere Verständnis des finiten Weltmodells ihre Eigenschaften diskutiert werden, da in ihnen - wie Hermann Weyl oben generell feststellte - die interessante geometrische Struktur erst sichtbar wird. Zunächst gibt es die sogenannten *Lorentz-Transformationen*

$$\Psi_\Lambda(X) = \begin{pmatrix} \Lambda & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{S}, \quad (29)$$

die nicht nur die Minkowski-Einheitsquadrik  $I_-$  (19), sondern auch den gewählten ‚Zentrumspunkt‘  $X$  invariant (unverändert) lassen, wobei die  $d \times d$ -Matrix  $\Lambda$  die Gleichung  $I_-^{d-1} = \Lambda^t I_-^{d-1} \Lambda$  erfüllen muß und daher eine Einheitswurzel in  $d - 1$  Dimensionen ist.<sup>22</sup> Die Menge der Lorentz-Transformationen bildet eine Untergruppe der Symmetriegruppe (28) bzgl. der Hintereinanderausführung, die sogenannte *finite Lorentzgruppe*

$$L(d) := \{ \Psi_\Lambda \mid \Lambda^t I_- \Lambda = I_- \} \subset \mathcal{S} = G_-(d) \quad (30)$$

mit der Dimension  $\dim L(d) = \frac{d(d-1)}{2}$ . Es gibt aber noch mehr Symmetrie-Transformationen des Wechselwirkungsgesetzes (20), da es ‚quadratisch‘ ist. Offensichtlich kann das Wechselwirkungsgesetz auch invariant bleiben, wenn die Nachbarpunkte  $P' = Q(P)$  eines beliebigen Nachbarpunktes  $P \in Q(X)$  von  $X$  miteinander vertauscht werden, da  $X = Q \circ Q(X)$  invariant bleibt, wenn der Punkt  $X$  wie auch  $P$  bei diesen Transformationen nicht verändert werden. Diese sogenannten *Eich-Transformationen*

$$\Psi_E(X, P) := \Psi_{\Gamma'}^{-1}(-x_\mu) \Psi_\Gamma(x_\mu) \quad (31)$$

lassen sich durch zwei (spezielle) Transformationsmatrizen

$$\Psi_\Gamma(x_\mu) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \Gamma \end{pmatrix} \in \mathcal{S}, \quad (32)$$

darstellen, die die Einheitsgleichung  $I_+^{d-1} = \Gamma^t I_+^{d-1} \Gamma$  erfüllen. Sie lassen sowohl  $X$  und  $P$  als auch die Wechselwirkungsrelation  $Q \circ Q(X)$  in Gl. (20) invariant, aber nicht  $Q(X)$  oder  $Q(P)$  einzeln. Die wesentliche Größe, die unter diesen Eichtransformationen aber invariant bleibt, ist der Schnitt

$$Q^k(X, P) = Q(X) \cap Q(P) \in \mathfrak{P}\mathbb{W}_p^k(X, P) \quad (33)$$

der beiden ‚wechselwirkenden‘ Quadriken  $Q(X)$  und  $Q(P)$  in den benachbarten Punkten  $X$  und  $P$ , die entartet vollständig in einem linearen (projektiven)  $k$ -dimensionalen Unterraum  $\mathfrak{P}\mathbb{W}_p^k(X, P)$  liegen. Die Menge der Eich-Transformationen (31) bilden wie die Lorentz-Transformationen (29) bzgl. der Hintereinanderausführung eine Gruppe, die sogenannte *finite*

<sup>21</sup>Die finiten Lorentztransformationen  $\Lambda$  sowie die finite Eichtransformationen sind Untergruppen der allgemeinen linearen Gruppe  $GL(d+1, \mathbb{K})$ . Während die Lorentztransformationen auch die Hyperebene  $H^\infty$  im Unendlichen invariant lassen, nutzen die Eichtransformationen die Quadrikenpunkte im Unendlichen um eine Isometrie  $\Psi_0$  in Gl. (27) mit einem Tilt von  $H^\infty$  zu realisieren.

<sup>22</sup>Für Symmetrien  $\Psi_0$  (d. h.  $Q$  ist invariant) impliziert die Invarianz von  $X$  (Lorentz-Transformation), dass auch die Hyperebene im Unendlichen und damit der Parallelitätsbegriff invariant ist.

Eichgruppe

$$G(k) := \{ \Psi_E(X, P) \mid \Psi_E(X, P) = \Psi_{\Gamma}^{-1}(-x_\mu) \Psi_{\Gamma}(x_\mu) \} \quad (34)$$

wobei alle Eichgruppen zusammen eine Produktstruktur

$$G(3) \times G(2) \times G(1) \quad (35)$$

haben wie die fundamentale Eichgruppe (15) des Standardmodells. Die Anzahl  $\dim(G(k))$  der Generatoren  $G_\mu^i$  von Eichtransformationen  $\Psi_E(X, x_\mu)$  im  $k$ -dimensionalen Raum  $\mathfrak{BK}_p^k$  ist  $\dim(G(k)) = k^2 - 1$  (bzw.  $\dim(G(1)) = 1$ ) und entspricht damit gerade für  $k = 3$  der Anzahl 8 von Gluonenfeldern  $g_\mu^i(P)$ , für  $k = 2$  der Anzahl 3 der schwachen Wechselwirkungsfelder  $W_\mu^\pm(P)$  und  $Z_\mu^0(P)$  sowie für  $k = 1$  der Anzahl 1 des elektromagnetischen Feldes  $\gamma_\mu(P)$  (Photon) in Abbildung 5. Diese Symmetrie-Transformationen, bzw. die sogenannten Generatoren  $G_\mu^i$  ( $\phi_\mu^a(P)$ ) der finiten Eichgruppe (34) lassen sich daher parameterisieren durch sogenannte vektorielle *Eichfelder* (16)

$$\phi_\mu^a(P) = \begin{cases} \gamma_\mu(P) & \text{für } k = 1 \\ W_\mu^\pm(P), Z_\mu^0(P) & \text{für } k = 2 \\ g_\mu^j(P) & \text{für } k = 3 \end{cases} \quad (36)$$

Es ist bemerkenswert, dass das Wechselwirkungsgesetz (20) offensichtlich invariant unter den Symmetrie-Transformationen (28) ist, da diese gemäß ihrer Definition (27) und Gl. (21) die Quadrik  $Q(X)$  bzw. ihr ‚Quadrat‘  $Q \circ Q(X)$  gar nicht ändern. In dem Wechselwirkungsgesetz betrifft die Lorentz-Transformation nur die Invarianz des 1. Argument, d. h. nur von  $Q(X)$  und  $X$  (so dass  $X = Q \circ Q(X)$  automatisch erfüllt ist), während eine Eichtransformation auch das 2. Argument verwendet, d. h.  $Q(P)$  und  $Q(X)$  synchron so transformiert, dass  $X = Q \circ Q(X)$  gültig bleibt. Eine beliebige Transformationsmatrix  $\Psi$  ändert aber sehr wohl  $Q(X)$ , so dass das Wechselwirkungsgesetz (20) eine Einschränkung an mögliche Felder  $\psi_i(P)$ ,  $q_j(P)$ ,  $\nu_l(P)$  und  $e(P)$  in Gl. (24) bedeutet. Es bleibt ein wichtiger Schritt zu zeigen, dass diese Einschränkungen gerade die gemessenen Wechselwirkungen (11) des Standardmodells sind (siehe **S2** unten auf S. 59). Zu jedem Typ der elementaren Teilchen würde sich dann diese Nachbarschaftssymmetrie als eine Kraft äußern, die wir als Gravitation ( $k = 4$ ), starke ( $k = 3$ ), schwache ( $k = 2$ ) und elektromagnetische ( $k = 1$ ) Wechselwirkung kennen. Das, was wir in der Natur als Kräfte erfahren, sind also Zwangsbedingungen (Restriktionen) an mögliche Nachbarschaftsordnungen von Punkten, Geraden und Ebenen, die wir in verschiedene Kraftarten zwischen elementaren Teilchentypen klassifizieren können.

## Charakterisierung homogener Geometrien: Translationen

In der Physik spricht man von einem ‚homogenen Feld‘  $Q(P)$  von quadratischen Formen bzw. von einer einfachen ‚homogenen‘ Welt, wenn das Feld aus lauter verschobenen (ähnlichen) quadratischen Formen besteht. Genauer ausgedrückt, wenn die Transformationsmatrix  $\Psi(P)$  für die Quadrik (21) in jedem Punkt  $P$  ‚nur‘ eine Parallelverschiebung nach  $P$  ist.<sup>23</sup> Wie die

<sup>23</sup>Translationen sind in projektive Geometrien eindeutig definiert bzgl. einer ‚Hyperebene im Unendlichen‘, die als duale Hyperebene zum Zentrumspunkt  $O$  einer Quadrik  $Q(O)$  gegeben ist. Translationen sind - nach den Isometrien - die ‚nächstbeste‘ Symmetrie: sie lassen neben dem affinen Raum auch die Quadrik  $Q^k$  im Unendlichen, d. h. für Geraden und Ebenen invariant. Sie werden daher in Kapitel 5 zur Definition einer ‚leeren‘ und ‚flachen‘ Raumzeit  $\mathbb{B}^d$  verwendet. Eichtransformationen lassen zusätzlich  $Q$  invariant, aber nicht mehr den affinen Raum (bzw. die Hyperebene im Unendlichen).

Isometrien  $\mathcal{S}$  in Gl. (28) bilden auch diese Transformationen eine Gruppe, die *Translationsgruppe*

$$\mathcal{T} = \{ \Psi_T \mid \Psi_T \text{ verschiebt alle Punkte parallel um } T \in \mathbb{K}_p^d \}. \quad (37)$$

Albert Einsteins zentrale Idee in der Allgemeinen Relativitätstheorie war, dass die *Inhomogenität* der Raumzeit, d. h. ihre Krümmung in der Welt als physikalisches Phänomen der Gravitation wahrgenommen wird [7]. Eigenschaften der Materie, z. B. ihre Schwere, werden damit zu geometrischen Eigenschaften des Raumes, in dem sie sich bewegen. Wechselt man - aus obigen Gründen - die Annahmen über die Geometrie des Raumes von einer kontinuierlichen Mannigfaltigkeit  $\mathbb{R}^d$  zu einer Menge  $\mathbb{K}_p^d$  endlich vieler Punkte, ist sogar eine noch viel weitreichendere Folgerung möglich: die *Einheit von Materie mit Raum und Zeit*. Die finite Welt  $\mathbb{K}_p^d$  ist notwendig projektiv und hat dadurch mehr Freiheitsgrade, die nicht nur als Krümmung der Raumzeit, sondern auch als materielle Freiheitsgrade der Welt verstanden werden können.<sup>24</sup> Was wir als Materie und Kräfte wahrnehmen, sind nach diesem Weltmodell nur geometrische Krümmungen von zusammenhängenden Punkten. Es gibt keinen prinzipiellen Unterschied zwischen Raum, Zeit und Materie; alle drei sind nur verschiedene *Erscheinungsweisen einer inhomogenen Welt* von Punkten, die Nachbarpunkte haben. Diese Nachbarschaftsordnungen legen fest, welche Weltstruktur wir als Raum wahrnehmen, was als Zeit erfahren oder als Kräfte von Materie erleben. Die materiellen Freiheitsgrade sind dabei solche Nachbarschaftsordnungen, die eine homogene Ordnung der Welt stören, d. h. die Punkte zu ‚Klumpen anhäufen‘ und die Linien ‚kräuseln‘ wie in einem kunstvollen Gewebe (siehe Abbildung 10). Homogen ist ein Feld  $Q(P)$  von Quadriken, wenn die Quadrik  $Q(P)$  an  $P$  durch Translation  $\Psi_T(P)$  aus der Quadrik  $Q(O)$  am Ursprung hervorgeht. Jede andere Transformationsmatrix  $\Psi$ , die nicht eine Isometrie  $\Psi_0$  ist, führt zu Inhomogenitäten der Welt, die als Teilchenfelder erfahrbar sind.

Doch ganz so einfach ist es in endlichen Geometrien  $\mathbb{K}_p^d$  nicht, da dort im Unterschied zu kontinuierlichen Geometrien  $\mathbb{R}^d$  sogar die homogenen Räume sehr kompliziert aussehen und keineswegs einfach mit unserem homogenen Anschauungsraum vergleichbar sind. Wie dieser aus einer endlichen Punktmenge  $\mathbb{K}_n^d$  entsteht, muß nun untersucht werden.

## 5 Ursprung des Raumzeitkontinuums: Nähe und Nachbarschaft

Die ganzen Zahlen hat der liebe Gott gemacht,  
alles andere ist Menschenwerk.  
Leopold Kronecker, Vortrag 1886.

Nach der Einführung der Materie als Deformationen der Welt, müssen wir uns wieder der homogenen finiten Welt zuwenden, bei der es noch einiges zu klären gibt. Denn das in Abbildung 9 gezeigte Beispiel einer finiten Ebene  $\mathbb{K}_7^2$  sieht nicht gerade aus wie unser kontinuierlicher Anschauungsraum und die roten Quadrikenpunkte in Abbildung 11 (links) entsprechen nicht dem, was wir üblicherweise als Kreis oder Hyperbel betrachten. Warum können wir also in diesem finiten Modell überhaupt erwarten, eine (von Materie leere) Welt auf großen Skalen als eine kontinuierlich wahrgenommene Raumzeit beschreiben zu können? Wie kommt man auf natürliche Weise von ganzen natürlichen Zahlen zur Beschreibung eines Kontinuums?

<sup>24</sup>Die Idee einer projektiven (kontinuierlichen) Raumzeit hatte bereits Oswald Veblen 1930 im Anschluß an die Vereinheitlichung von Gravitation und Elektromagnetismus durch Theodor Kaluza und Oskar Klein.

Und warum gibt es überhaupt einen Unterschied zwischen Materie sowie Raum und Zeit, wenn alles nur geometrische Störungen sind? Das Problem der Ordnung in endlichen Geometrien (Körpern) ist vermutlich das schwierigste Kapitel dieses alternativen Weltmodells.

## Ordnung und Umgebung: Topologie finiter Geometrien

Warum beobachten wir einen scheinbar andauernd vor uns liegenden Raum und eine stetig fortschreitende oder ruhig fließende Zeit - im Gegensatz zu den komplex veränderlichen Zuständen der Materie? Permanent erscheint etwas dann, wenn es bei all den Veränderungen ‚gleich‘ bleiben kann. Eine notwendige Voraussetzung dafür ist, dass zumindest Drehungen der Blickrichtung oder Verschiebungen des Standpunktes einer Beobachtung nicht zu Änderungen der Geometrie des Raumes führen. Das ist zwar für unseren Anschauungsraum der Fall, nicht aber in finiten Geometrien  $\mathbb{K}_p^d$ , da die Begriffe ‚Umgebung‘ und ‚Nachbarschaft‘ auseinanderfallen und nicht mehr Ähnliches bezeichnen. Der Grund liegt mathematisch darin, dass zwar für eine kontinuierliche Geometrie wie z. B. den Euklidischen Raum  $\mathbb{R}^d$  eine Topologie (Theorie der Nähe bzw. der Umgebung) aus einer Metrik (Theorie der Nachbarschaft) abgeleitet werden kann, in endlichen Geometrien  $\mathbb{K}_p^d$  aber das eine nicht natürlicherweise aus dem anderen folgt. Man kann zwar für endliche Mengen stets die diskrete Topologie, bei der alle Punkte isoliert sind, definieren, viel gewonnen hat man dadurch aber nicht, da sie keine weitere Struktur, z.B. der Nachbarschaft impliziert. Wir werden daher zuerst eine Neuordnung der Punkte vornehmen, bevor für einen Kontinuumsraum eine adäquate topologische Struktur eingeführt wird.

Eine irritierende Konsequenz der Geometrie endlich vieler Punkte ist, dass die Ordnung der Punkte, die durch die Nachbarschaftsdefinition gegeben ist, nicht die einzige implizierte (existierende) Ordnung ist. Betrachtet man nämlich wie in Abbildung 11 die für eine quadratische Form benötigten Quadrate der Abstände von Punkten und sortiert sie nach den größer werdenden Werten ihrer Quadratabstände, dann ist dies in  $\mathbb{K}_p^d$  eine andere Ordnung als wenn man nur gemäß den (nicht quadrierten) Abständen sortiert.<sup>25</sup> In kontinuierlichen Geometrien tritt dies nicht auf, da die Quadrierung zweier reeller Zahlen ihre Größenordnung nicht umdreht, sehr wohl aber in finiten Geometrien  $\mathbb{K}_p^d$ . So sind in Abbildung 11 zwei verschiedene Auftragungen der gleichen finiten Ebene  $\mathbb{K}_p^2$  mit  $n^2 = 59^2$  Punkten zu sehen: links sind die Nachbarpunkte (Quadrik  $Q$ ) des zentralen Punktes gezeigt, wie sie ‚weit‘ in der Ebene verstreut liegen, während rechts die Ebene so geordnet ist, dass die Nachbarpunkte, d. h. die Quadriken  $Q$  ‚halbwegs glatte‘ Geraden bilden. Diese fehlende Eindeutigkeit von Anordnung von Punkten ist wohl der Grund gewesen, warum finite Geometrien  $\mathbb{K}_p^d$  seit ihrer Entdeckung am Ende des 19. Jahrhunderts nicht für Modelle der Physik herangezogen wurden. Die Überlagerung verschiedener Ordnungen widersprach zu sehr der alltäglichen Anschauung in der klassischen Welt. Erst die Entdeckung von Quantenphänomenen ließ es zu, auch über eine Überlagerung von Zuständen der Materie nachzudenken und letztendlich auch über eine Überlagerung von Räumen und Zeiten, was im folgenden Abschnitt 6 genauer betrachtet werden soll. Zuerst muß allerdings eine Ordnung in die finite Geometrie  $\mathbb{K}_p^d$  so eingeführt werden, dass unser klassischer Anschauungsraum in ihr erkennbar wird.

In unserem Anschauungsraum unterscheiden wir kaum zwischen den Begriffen ‚Nähe‘ und ‚Nachbarschaft‘ („Angrenzer“, „Nebenzimmer“), zwischen Umgebung („vicinity“, „vicinal“, „ne-

---

<sup>25</sup>Der mathematische Grund ist die Zyklizität der multiplikativen Gruppe  $\mathbb{K}_p^*$  des Primkörpers  $\mathbb{K}_p$ , was erlaubt, dass das Quadrat einer Zahl kleiner als die Zahl selber ist. In den kontinuierlichen reellen Zahlen  $\mathbb{R}$  ist dagegen die Abbildung des Quadrierens ordnungserhaltend.

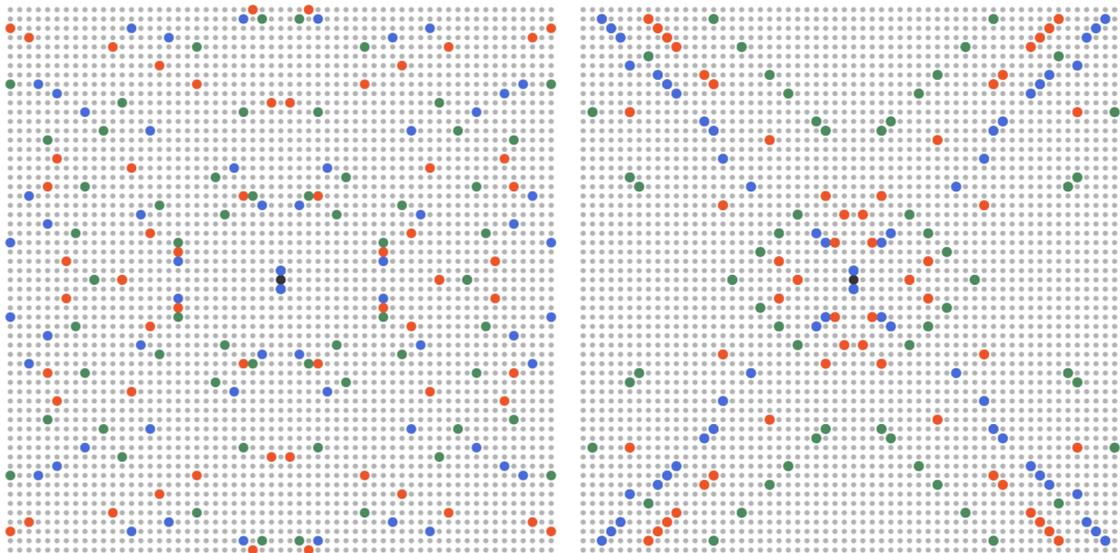


Abbildung 11: Eine 2-dimensionale Ebene  $\mathbb{K}_p^2$  mit  $p^2$  Punkten ( $p = 59$ ). Die blauen Punkte sind die Lösungsmenge der Gl. (17) mit  $s^2 = -1$ , während die roten Punkte die Quadrik zu  $s = 17$  ( $s^2 = 53 = -6$ ) und die grünen zu  $s = 20$  ( $s^2 = 46 = -13$ ) darstellen. Die Geometrie endlich vieler Punkte ist auf den ersten Blick verwirrend: (a) die Nachbarpunkte zu dem zentralen Punkt in der Mitte liegen in der gesamten Ebene verteilt, wenn nach den Koordinaten in einer Basis  $\mathcal{B} = (B_1, B_2)$  von zwei ausgewählten Nachbarpunkten  $B_1$  und  $B_2$  geordnet wird (linearer Spann  $\mathbb{T}^d(\mathcal{B})$  von  $\mathcal{B}$ ). (b) die Ordnung nach den Quadraten der Koordinaten führt die Nachbarpunkte auf Geraden zusammen. Diese Überlagerung unterschiedlicher Ordnungen scheint der geometrische Grund für Quantenphänomene zu sein. (Quelle: Alexander Laska)

ar‘ oder ‚close by‘) und unmittelbarer Angrenzung (‚neighbourhood‘, ‚adjacent‘ oder ‚next to‘). Wenn etwas ‚benachbart‘ oder ‚angrenzend‘ ist, dann ist es auch ‚nahe‘ (‚lokal‘) und umgekehrt. In finiten Geometrien  $\mathbb{K}_p^d$  können dagegen Nachbarn ‚nicht-lokal‘ verteilt und weit weg sein wie z. B. in Abb. 11 links gezeigt. Insbesondere kann sich die Umgebung eines Punktes, d. h. die ihn lokal umgebenden Punkte, komplett verändern, nur allein durch Veränderung der Schrittrichtungen. Es gibt sehr viele Anordnungen der Punkte, die durch einen einfachen Wechsel der Basis  $\mathcal{B}$  entstehen. Das ist anders im Euklidischen Raum  $\mathbb{R}^d$ , in dem durch ein Basiswechsel (z. B. Drehung der Achsen) keine ‚Umordnung‘ der Punkte stattfindet (da der Koordinatenwechsel stetig ist). Währenddessen ordnet in finiten Geometrien jeder Basiswechsel die Punkte um. In diesen verwirrenden Nachbarschaftsrelationen einer finiten Geometrie muß daher ein Raumkonzept gefunden werden, das eine (unter Symmetrien) ‚stabile Lokalität‘ zeigt.

Eine **Umgebung**, d. h. ein ‚Bereich um einen Ort‘, bezeichnet diejenigen Punkte, die man durch ‚wenige‘ Schritte entlang von fest gewählten Richtungen erreichen kann, während eine **Nachbarschaft** diejenigen Punkte sind, die durch eine Quadrik geordnet den Abstand 1 haben, d. h. benachbart sind. In finiten Geometrien  $\mathbb{K}_p^d$  liegen diese Nachbarpunkte aber in der Regel nicht in der Umgebung eines Punktes, d. h. können nicht auch durch wenige Schritte in andere Richtungen erreicht werden (siehe Abb. 11(a)). Die Umgebung eines Nachbarpunktes ist komplett verschieden von der Umgebung des Ausgangspunktes. Der Grund liegt in der quadratischen Form (6) der Nachbarschaftspunkte, die zwei verschiedene Ordnungen der Punkte erlaubt; eine lineare und eine quadratische:

- **lineare Basisordnung:** Wählen wir z. B. in einer Ebene zwei Nachbarpunkte (bzw. Richtungen) eines Zentrums aus (siehe Abbildung 11 links) und ordnen alle anderen Punkten nach der Anzahl der Schritte, die man benötigt, um dorthin zu gelangen - entlang den zwei ausgewählten Richtungen. Mathematisch gesprochen wählt man eine Basis  $\mathcal{B} = \{B_1, \dots, B_d\}$  und betrachtet ihre *lineare Hülle (Spann)*  $\mathbb{T}^d(\mathcal{B})$ , die eine lokale Umgebung definiert, basierend auf der linearen Ordnung der Koordinaten. Im Gegensatz zu kontinuierlichen Geometrien führt die Wahl von zwei anderen Nachbarpunkten als Referenzrichtungen allerdings zu komplett verschiedenen Umgebungspunkten, d. h. die ‚lokalen‘ Punkte einer Umgebung hängen von der Wahl der Basis  $\mathcal{B}$  von  $d$  ausgewählten Richtungen  $B_i$  ab, in die man eine gewissen Anzahl von Schritten geht. Es gibt daher sehr viele **lineare Hüllen-Umgebungen** zu jedem Punkt, die verschiedenen linearen Welten oder besser ‚Weltblättern‘ entsprechen. Nur alle Weltblätter übereinander gelegt, ergeben die gesamte Welt, was man vielleicht mit Abbildung 15 illustrieren kann.

Eng verwandt mit dem Begriff einer Umgebung ist der Begriff der **Lokalität**: Eigenschaften, die ‚nur‘ auf eine bestimmte Umgebung bezogen sind, nennt man ‚lokal‘, während bei ‚globalen‘ Eigenschaften nie eine geeignet ausgewählte Umgebung gefunden werden kann, um sie zu bestimmen. ‚Lokalität‘ hängt in finiten Geometrien von der Wahl der ‚lokalen‘ Nachbarpunkte ab, d. h. von der gewählten linearen Hüllen-Umgebung. Lokalität ist daher etwas anderes als Nachbarschaft.

- **quadratische Nachbarordnung:** Wir können die Nachbarn aber auch so sortieren, dass sie gemäß ihres quadratischen Abstandes (6) ‚beieinander‘ liegen (siehe Abb. 11 rechts). Mit anderen Worten, wir definieren die Raumpositionen der Nachbarpunkte mit der quadratischen Invariante  $s^2$ , so dass die Nachbarschaftsrelation stabil unter Symmetrie-Transformationen ist. Dafür müssen wir (anstelle der Koordinaten der Punkte selber wie in Abb.11 links) nur die Quadrate der Koordinaten (sogenannte Quadrat- oder Quadrikkordinaten - wie in Abbildung 11 rechts gezeigt) auftragen, in denen die quadratische Nachbarordnung ‚linear‘ ist. Diese Ordnung gibt die metrische Struktur einer Quadrik an, die allen lokalen Hüllen gemeinsam ist, die bei jedem Koordinatenwechsel erhalten bleibt und auf große Skalen in den vertrauten kontinuierlichen Minkowski-Raum übergeht (siehe Abbildung 12). Allerdings sind Nachbarn von zwei benachbarten Punkten nicht unbedingt auch nahe beieinander liegend, sondern können überall (in einer linearen Hülle) liegen: Punkte z. B. einer Geraden oder Ebene, die man schrittweise von Nachbarpunkt zu Nachbarpunkt durchläuft, d. h. der lokale Spann (Hülle) liegen weit im Raum verstreut.

Für einen ‚alltagstauglichen‘ (gemeinsamen) Umgebungsbegriff ist es aber sinnvoll, dass nicht nur die Nachbarn in ihr sind (wie in der quadratischen Nachbarordnung), sondern auch die Nachbarn der Nachbarn (wie in der linearen Hüllen-Umgebung). Dies ist in finiten Geometrien aber nur für eine Untermenge von Punkten möglich, die wir nun genauer bestimmen wollen.

## Struktur finiter Geometrien: Basisraum und Fasern

Diese verschiedenen Ordnungen und Umgebungsbegriffe motivieren, eine geeignete Darstellung der finiten Geometrie  $\mathbb{K}_p^d$  zu suchen, die einerseits ihre verschränkte, nicht-lokale Überlagerungsstruktur anschaulich macht, andererseits auch einen Raum definiert, der unserem Anschauungsraum

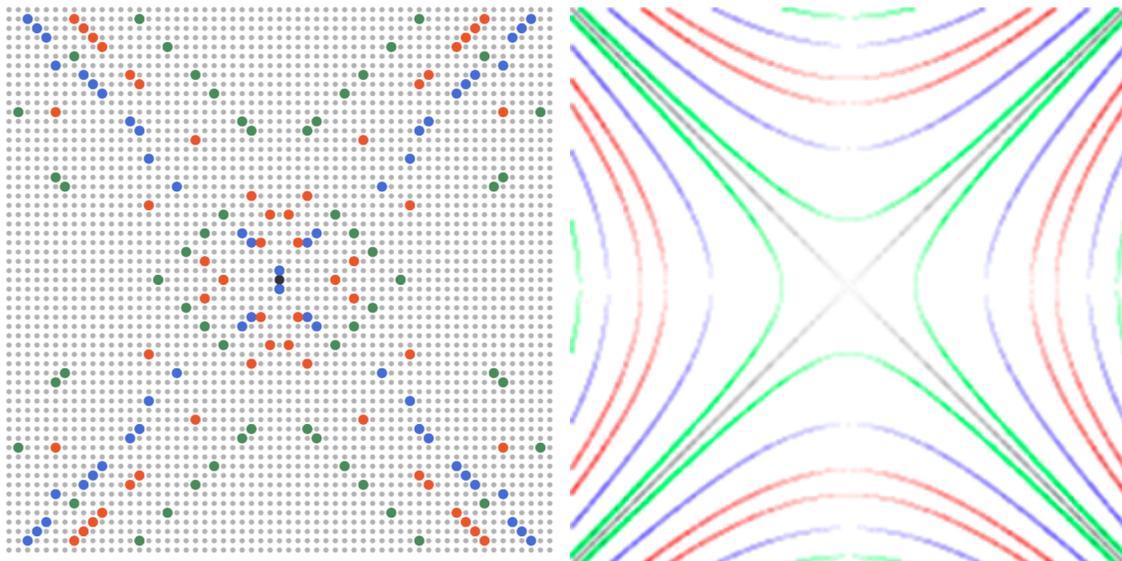


Abbildung 12: Darstellung der Quadrikkpunkte in der quadratischen Nachbarordnung. Im Kontinuumsimes geht die Quadrik im Basisraum  $\mathbb{B}^d$  in die hyperbolischen Kegelschnitte der Minkowski Raumzeit über. Rechts ist  $\mathbb{K}_p^2$  für  $p = 10007$  zu sehen, wobei die reelle Wurzel aus den Quadratkoordinaten gezogen wurde, die links für  $p = 59$  gezeigt sind. (Quelle: A. Laska)

mit seiner eindeutigen Ordnung und Topologie entspricht<sup>26</sup>.

### Ordnungsstruktur der Welt: Basisraum

Wie bereits bei der Diskussion der Symmetrien in Kapitel 4, wo die Translationen (37) nur durch die Auswahl eines affinen Raumes (einer Hyperebene im Unendlichen) definiert werden konnten, so bietet es sich nun an, bestimmte *Raumzeit-Punkte*  $X \in \mathbb{B}_n^d$  für einen *finiten Anschauungsraum* oder *Basisraum*  $\mathbb{B}_n^d \subset \mathbb{K}_p^d$  auszuwählen und alle anderen Punkte  $P \in \mathbb{K}_p^d \setminus \mathbb{B}_n^d$  der finiten Geometrie  $\mathbb{K}_p^d$  nur durch ihre Nachbarschaft  $Q(X)$  zu diesen Punkten mit einzubeziehen. Dies entspricht der Definition, was ein ‚leerer Raum‘, d. h. das ‚Vakuum‘ sein soll, nämlich der finite Anschauungsraum  $\mathbb{B}_n^d$ , und was *Materie ‚ist‘*, nämlich die vielfältigen Freiheitsgrade der Nachbarschaftspunkte  $P \in Q(X)$  zu den Raumzeit-Punkten  $X \in \mathbb{B}_n^d$ . Dass wir überhaupt so etwas wie einen ‚leeren Raum‘ wahrnehmen, liegt an den Wechselwirkungen (**v**) der Quadriken, die gebundene Systeme hervorbringen, die den finiten Anschauungsraum  $\mathbb{B}_p^d$  auf großen Skalen zu einem persistenten Ereignis machen, denn makroskopische Körper können als gebundene Systeme nicht so ohne weiteres den Anschauungsraum verlassen. Dass dies tatsächlich so ist und eine klassische Raumzeit existiert, muß aber erst noch im finiten Weltmodell gezeigt werden (siehe unten das Problem **W8** in Abschnitt 8).

Nun kommen wir zu der entscheidenden Frage, wie die Raumzeit-Punkte  $X \in \mathbb{B}_n^d$  für einen finiten Anschauungsraum  $\mathbb{B}_n^d$  ausgewählt werden sollen. Das entscheidende Kriterium ist die Übereinstimmung der Nachbarschaften und linearen Umgebungen, d. h. der Basisraum muß als diejenige Untermenge von Punkten in  $\mathbb{K}_p^d$  identifiziert werden, für die lineare und

<sup>26</sup>Die mathematische Disziplin Topologie klärt, was zusammenhängt; physikalisch sind dies die makroskopischen Körper, weshalb man sinnvollerweise einen Umgebungsbegriff definiert, der sich nicht nur an den Nachbarschaftspunkten einer Quadrik orientiert, sondern auch an der linearen Hülle, die von bestimmten Nachbarschaftspunkten aufgespannt wird und ‚zusammenhängende, Punkte beinhaltet.

quadratische Ordnungen zusammenfallen. Dies sind z. B. die Punkte in der quadratischen Nachbarordnung, deren Quadratkoordinaten  $x_\mu^2$  in einem endlichen Körper  $\mathbb{K}_p$  tatsächlich Quadrate von ganzen Zahlen  $x_\mu$  (gerechnet in  $\mathbb{Z}$ ) sind. Diese entsprechen den Koordinaten in einer speziellen linearen Hülle, d. h. der Anzahl  $x_\mu$  der Schritte entlang einer speziellen Basis  $\mathcal{B}$ . Diese eine lineare Hülle (Tangentenraum)  $\mathbb{T}^d(\mathcal{B})$  könnten wir als Basisraum  $\mathbb{B}_p^d$  nehmen. Allerdings liegen die meisten Punkte  $P$  der anderen linearen Hüllen  $\mathbb{T}^d(\mathcal{B}')$  gar nicht in diesem Basisraum. Wir können aber alle Punkte  $P \in \mathbb{K}_p^d$  immer denjenigen Punkten  $X \in \mathbb{B}_p^d$  im Basisraum zuordnen, für die sie Nachbarn sind. Mit anderen Worten, die quadratische Nachbarordnung definiert eine Quadrik-Umgebung  $Q(X)$  von  $X$ , in der  $P$  liegt.

Eine Möglichkeit, die unterschiedlichen Ordnungen zu vereinigen, liegt also - mathematisch ausgedrückt - in der Einteilung aller Weltpunkte  $P \in \mathbb{K}_p^d$  in einen (*externen*) Basisraum mit Punkten  $X \in \mathbb{B}_p^d$  und viele (*interne*) Faserräume  $\mathbb{F}(X)$ , die an jedem Basispunkt  $X$  ‚angeheftet‘ sind und seine Nachbarnpunkte  $P \in \mathbb{F}(X) = Q(X) \setminus \mathbb{B}_p^d$  enthalten; symbolisch als Vereinigung

$$\text{Finite Geometrie } \mathbb{K}_p^d \equiv \text{Basisraum } \mathbb{B}_p^d \bigcup_{X \in \mathbb{B}_p^d} \text{ Fasern } \mathbb{F}(X) \quad (38)$$

geschrieben. Anschaulich nennt man einen Raum ‚intern‘, weil er ‚in‘ jedem Punkt sich befindet, während ein Raum, den man ‚überblicken‘ oder ‚durchfahren‘ kann, ausgebreitet oder ‚extern‘ ist. In der Mathematik nennt man eine solche geometrische Struktur ein ‚Faserbündel‘, da sie - wie in Abbildung 13 illustriert - wie ein geknüpfter Teppich aussieht. Allerdings ist ein Punkt  $P$  Nachbarnpunkt zu mehreren Basispunkten  $X$ , so dass die Fasern an bestimmten Stellen verknüpft sind, was in der Quantenphysik für den Ursprung der Nicht-Lokalität **P3** in Abschnitt 6 wichtig ist.

Zusammenfassend kann man sagen: die kontinuierliche Raumzeit  $\mathbb{R}^d$  ist ein ‚unscharfes‘ Bild des endlichen Basisraums  $\mathbb{B}_p^d$ , der durch makroskopische Körper ‚zusammengehalten‘ wird, da diese als gebundene Systeme die Nachbarnpunkte der Nachbarnpunkte in einer (!) linearen Hülle zusammenhalten. Die Freiheitsgrade der Punkte in den Fasern  $\mathbb{F}$  erscheinen dann als wechselwirkende Quanten in der gleichbleibenden Raumzeit. Durch die Unterscheidung von Basisraum  $\mathbb{B}_p^d$  und Faserraum  $\mathbb{F}$  bei den Punkten in der finiten Welt  $\mathbb{K}_p^d$  gewinnen wir die physikalisch wichtige Definition, was als Raumzeit und was als Materie erscheint:

**Die Punkte  $P$  in den Fasern stellen somit Teilchen dar, die in Basispunkten  $X \in \mathbb{B}_p^d$  raumzeitlich auftauchen und gemäß der Transformation  $\Psi(P)$  der Quadrik, d. h. der Teilchenfelder  $\vec{\psi}(P)$ ,  $\vec{q}(P)$ ,  $\vec{v}(P)$  und  $e(P)$  bestimmte elementare physikalische Eigenschaften (Spin, Ladungen und Masse) tragen.**

Mit anderen Worten, die Quadriken  $Q(P)$  bzw. ihre Linearisierungen in den Transformationsmatrizen  $\Psi(P)$  verleihen den Punkten  $P$  der Faser ihre physikalische Bedeutung - nicht als Orte in einer Raumzeit, sondern als Materiepunkte.

## **Kontinuumsmlimes: von endlichen Punktmengen zu metrischen Mannigfaltigkeiten**

Die diskrete Mathematik mit ihren Subdisziplinen Kombinatorik, Graphen- und Zahlentheorie stand lange im Schatten der kontinuierlichen Mathematik mit den Spezialisierungen in Geometrie und Analysis. Dies änderte sich etwas im 20. Jahrhundert mit der Entwicklung des Computers, der per se nur diskrete Operationen durchführen kann. Aber bereits gegen

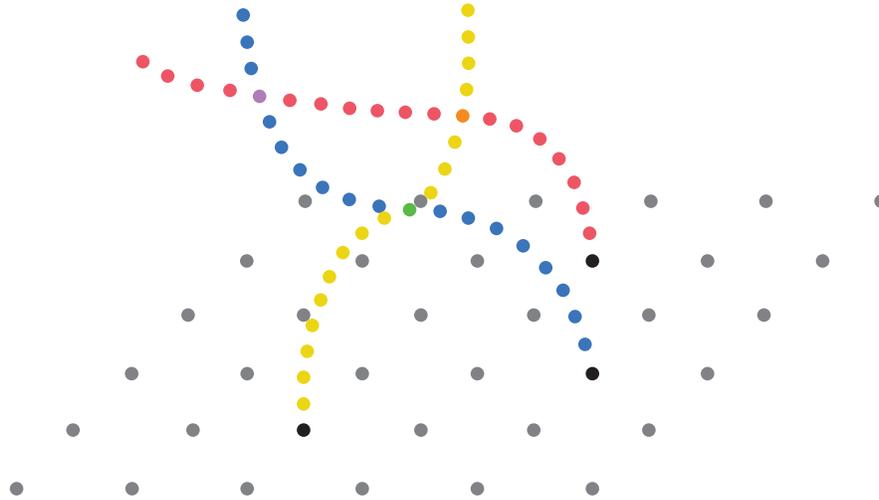


Abbildung 13: Basisraum  $\mathbb{B}_p^d$  (grau) mit Fasern  $\mathbb{F}(X)$  (farbig) an jedem Punkt  $X \in \mathbb{B}_p^d$ . In der Untermenge der Punkte im Basisraum entspricht die lineare Basisordnung der quadratischen Nachbarordnung, wobei Punkte  $P$ , die in anderen linearen Hüllen erreicht werden können, den Fasern  $\mathbb{F}(X) = Q(X) \setminus \mathbb{B}_p^d$  ihrer Nachbarpunkten  $X \in Q(P) \cap \mathbb{B}_p^d$  zugeordnet werden. Der Basisraum nähert sich daher für große Skalen der vertrauten Topologie des kontinuierlichen Anschauungsraumes an, wobei die komplexe Nachbarschaftsordnung durch gemeinsame ‚Verknüpfungs- oder Schnittpunkte‘ der Fasern wiedergegeben ist. Wählt man eine andere Basis  $B = \{B_0, \dots, B_d\}$  (lineare Hülle), dann erhält man einen anderen ‚Schnitt‘ durch dieses Faserbündel, indem  $X$  und  $P$  ihre Rolle bzw. Position in der Faser vertauschen. Die verwirrenden Unterschiede der verschiedenen linearen Hüllenumgebungen sind nun in Fasern sortiert, wodurch anschaulich wird, dass zwar alle Punkte einer Faser gemäß der quadratischen Nachbarordnung benachbart zum Basispunkt  $X$  sind, die Punkte einer Faser aber nicht vom Basispunkt durch Schritte erreicht werden können, da die Schritte nur im Basisraum erfolgen. (Quelle: A. Laska)

Ende des 19. Jahrhunderts entzündete sich ein Streit über die Grundlagen der Mathematik nachdem Georg Cantor 1874 die naive Mengenlehre und transfinite Zahlen einführte, um das ‚Unendliche‘ in den Griff zu bekommen. Leopold Kronecker - als früher Anhänger eines Finitismus und Vorläufer des mathematischen Konstruktivismus - griff seinen Schüler scharf an und wollte nur mathematische Objekte zulassen, die explizit konstruiert werden können. Doch wie beschreibt man mit natürlichen Zahlen das Kontinuum unendlich vieler dicht liegender Punkte? Bevor wir diese wichtige topologische Frage im nächsten Abschnitt ab S. 40 diskutieren, müssen wir die verschiedenen Zahlensysteme genauer betrachten.

### Rolle von Zahlen: Darstellung von Koordinaten und Nachbarschaftsrelationen

An verschiedenen Stellen wurden verschiedene Konzepte von ‚Zahlen‘ verwendet: reelle Zahlen  $\mathbb{R}$  für die Koordinaten einer kontinuierliche Mannigfaltigkeit (2), komplexe Zahlen  $\mathbb{C}$  für die Darstellung von Teilchenfeldern (10) und natürliche Zahlen  $\mathbb{N}$  bzw. endliche Zahlen  $\mathbb{K}_p$  definiert in Gl. (3) für die Darstellung finiter Geometrien mit einer kanonischen Einheitsquadratik (17). Aufgrund ihrer unterschiedlichen mathematischen Eigenschaften impliziert die Verwendung eines bestimmten ‚Zahlenkörpers‘ auch bestimmte algebraische, topologische oder geo-

metrische Eigenschaften. Man muß daher strikt zwischen einer physikalischen Welt (Natur), einer geometrischen Welt (mathematische Struktur wie z. B. eine projektive Ebene) und ihrer Darstellung in einem Modell (z. B. durch Verwendung von Koordinaten) unterscheiden. In der Regel implizieren Modelle weitere Eigenschaften, die zu den intrinsischen Eigenschaften einer geometrischen Welt (mathematischen Struktur) hinzu kommen, die ihrerseits ‚nur‘ ein Modell der physikalischen Welt ist.

Zu den reellen Zahlen gehören auch sogenannte ‚transzendente‘ Zahlen wie die Kreiszahl  $\pi$  oder die Eulersche Zahl  $e$ , die nicht als Lösungen einer algebraischen Gleichungen definiert werden können. Georg Cantor bewies 1874, dass die Menge solcher transzendenten Zahlen ‚überabzählbar‘ ist und setzte damit das Kontinuum deutlich von den abzählbaren Mengen ab. Die Frage, ob es transzendente Zahlen in der Natur gibt, kann allerdings nur empirisch geklärt werden, indem z. B. ein Kreis mit einer Präzision genauer als die Plancklänge vermessen wird. Aber selbst dies wäre kein ‚Beweis‘ der Existenz von  $\pi$  in der Natur, so dass die Annahme der Realität von reellen Zahlen eine ontologische und keine physikalisch notwendige bleibt.

Es ist eine nicht vermeidbare Entscheidung, welche mathematischen Objekte man für ‚real‘ hält und ihnen physikalische Bedeutung zuspricht. Das ist bei reellen Zahlen wie  $e$  und  $\pi$  eine offensichtliche Annahme, aber nicht wesentlich anders als auch bei endlichen Zahlen. So kann man die Primzahl  $p$  eines endlichen Körpers  $\mathbb{K}_p$  als eine „fundamentale Primzahl“ mit ontologischer Bedeutung für die natürliche Welt verstehen oder nur als eine mögliche Darstellungsweise der endlichen Punktmenge von elementaren Ereignissen durch einen Zahlenkörper  $\mathbb{K}_p$ . In letzterem Fall darf dann allerdings keine physikalisch relevante Konstruktion von der Primzahl  $p$  abhängen. Dies ist z. B. der entscheidende Grund, warum die Struktur der Welt *lokal* durch einen Basisraum mit einer Faser der benachbarten Punkte konzipiert wird (siehe Abschnitt 5) und nicht *global* durch eine Zellenbildung wie noch in Ref. [13]. Ein wichtiger Grund, neue Zahlen zur Beschreibung der Natur einzuführen, war oft das Bedürfnis nach der Lösungsmöglichkeit bestimmter Gleichungen, z.B. für die Diagonale eines Quadrates (Einführung der irrationalen Zahl  $\sqrt{2}$ ), für den Umfang eines Kreises (Einführung der transzendenten Zahl  $\pi$ ) oder für die Wurzel  $x^2 = -1$  (Einführung der komplexen Zahl  $i$ ). Im finiten Weltmodell, das auf der quadratischen Form (21) als fundamentalem Strukturierungsprinzip beruht, ist vor allem dieser letzte Fall des Wurzelziehens als die Umkehroperation der quadratischen Form relevant.

## Das Kontinuum: Topologie reeller Zahlen

Es wird vor allem René Descartes zugeschrieben begonnen zu haben, Geometrie mit Hilfe von (reellen) Zahlen und Koordinatensystemen zu betreiben. Insbesondere beschrieb er als erster die in Abb. 4 gezeigten Kegelschnitte durch die Koordinatengleichungen (6). Diese Verbindung von Geometrie und Algebra war zwar ein wichtiger Schritt in der Entwicklung der Mathematik, er führte aber wohl auch dazu, dass insbesondere den reellen Zahlen  $\mathbb{R}$  eine so herausragende Stellung in der Theorie von Raumzeiten eingeräumt wurde, dass fast vergessen wurde, dass ein geometrisches Modell von Raum und Zeit auch ohne die Einführung von reellen Zahlen als Koordinaten möglich sein sollte, wenn man nicht von vornherein dem Kontinuum ontologisch eine physikalische Existenz zusprechen möchte. Der Begriff des ‚Kontinuums‘ ist eng mit dem Begriff der reellen Zahlen  $\mathbb{R}$  verknüpft, da die reelle Zahlenachse als der geometrische Ausdruck eines Kontinuums gilt. Die reellen Zahlen  $\mathbb{R}$  als Modell eines physikalischen Raumes zu verwenden ist durchaus problematisch, da sie als Punktmenge Aspekte zeigen, die wir nicht aus dem Anschauungsraum kennen und daher kontraintuitiv oder paradox wirken (siehe Abbildung 14). So zeigten 1924 Stefan Banach und Alfred Tarski,

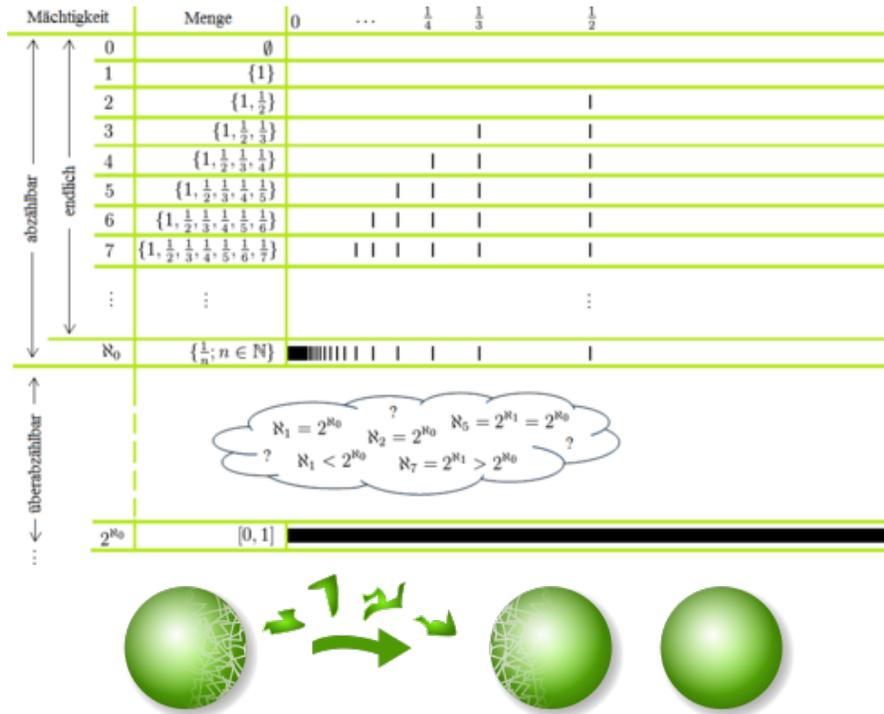


Abbildung 14: Kontinuum und Zahlen: die reellen Zahlen  $\mathbb{R}$  sind *topologisch vollständig*: sie enthalten mit jeder konvergierenden Folge von Zahlen auch ihre Grenzwertzahl. Die Topologie ist die Wissenschaft vom ‚Zusammenhang‘, sie definiert ‚Umgebungen‘ und damit Grenzprozesse. Die Maßtheorie ist dagegen die Grundlage für Maße von Punktmengen wie Volumen oder Flächeninhalte. Beide mathematische Disziplinen wurden im 19. Jahrhundert eingeführt, um scheinbare Probleme des Kontinuumsbegriffs angehen zu können: z.B. (a) die Nichtbeweisbarkeit der Mächtigkeit des Kontinuums; (b) das Banach-Tarski-Paradox des Volumenbegriffs im Kontinuum. Wichtig ist beidesmal die *Invarianz unter den Bewegungssymmetrien des Raumes*: sowohl der Umgebungsbegriff als auch der Maßbegriff sollten sich nicht ändern, wenn eine Symmetrie-Transformation (Drehung, Verschiebung, Spiegelung) vorgenommen wird. (Quelle: wikipedia)

dass man eine Kugel so in nur sechs Teile zerlegen kann, dass man diese wieder lückenlos zu zwei gleichen Kugeln mit gleichgebliebenen Radius zusammensetzen kann, d. h. das Volumen sich scheinbar verdoppelt hat. Die Mathematik löst diesen Widerspruch auf, indem sie zwischen messbaren Punktmengen und nicht-messbaren unterscheidet, wobei letzteren gar kein Volumen zugeordnet werden kann. d. h. nicht jeder Teilmenge der reellen Zahlen  $\mathbb{R}$  kann ein Maß zugeordnet werden. In finiten Geometrien  $\mathbb{K}_p^d$  muß diese Unterscheidung nicht gemacht werden und alle Punktmengen haben ein natürliches Volumenmaß, nämlich die Anzahl ihrer Punkte. Ein Kontinuumslikes muss daher nicht nur darauf achten, dass der topologische Umgebungsbegriff erhalten bleibt, sondern dass auch z. B. die Menge der Quadrikkpunkte messbar bleibt.

Bereits oben auf S. 18 sind wir bei den ungelösten Problemen des Standardmodells auf die Kontinuumshypothese gestoßen und dass man sie aus den Axiomen der Mengenlehre weder beweisen noch widerlegen kann. Für den Kontinuumslikes unseres finiten Weltmodells bedeutet dies, dass wir die reellen Zahlen nur als Hilfsmittel für den Grenzfall eines Kontinuums betrachten, nicht aber die mathematischen Probleme des Kontinuums für unsere finite

Geometrie ernst nehmen müssen. Nach diesem Exkurs über die Problematik reeller Zahlen  $\mathbb{R}$  und des Kontinuum, die in finiten Geometrien  $\mathbb{K}_p^d$  aber gar nicht auftritt, müssen wir uns um eine andere Problematik kümmern: die Überlagerung von (linearen) Ordnungen, was uns zu den Quantenphänomenen in Kapitel 6 führen wird. Zunächst müssen aber die ‚klassischen‘ Theorien der Physik in einem Kontinuumslices aus dem finiten Weltmodell hergeleitet werden.

## Herleitung der Allgemeinen Relativitätstheorie und Feldtheorie

Wir haben in Abbildung 12) gesehen, dass in der quadratischen Nachbarordnung die Orte der Quadrikkpunkte  $Q$  sich so sortieren, dass sie auf große Skalen (d.h. kleine Auflösung des Bildes) wie die vertrauten Hyperbeln der Euklidischen Geometrie aussehen (siehe Abb. 4). Genauso muß gezeigt werden, dass in einem solchen ‚Kontinuumslices‘ die vertraute Physik erscheint, die empirisch so hervorragend getestet wurde. Ziel dieses Kapitels ist also der Kontinuumslices des finiten Weltmodells und damit die Herleitung sowohl der Einsteinschen Allgemeinen Relativitätstheorie als auch der (nicht-abelschen) klassischen Eichtheorie des Standardmodells.

### Einsteins Gleichungen einer gekrümmten Raumzeit

Der Basisraum  $\mathbb{B}^d$  ist die Menge der gewählten Basispunkte  $\mathcal{B}$ , die rekursiv bestimmt wird, indem zu jedem Basispunkt  $X$  wieder eine Basis  $\mathcal{B}(X)$  gewählt wird. Mit anderen Worten,  $\mathbb{B}^d$  ist die Menge aller Punkte, die erreicht werden, wenn Schritt für Schritt zu den als Basis ausgewählten Nachbarpunkten gegangen wird. Die Existenz von starren Körpern verlangt, dass zumindest auf der Längenskala des Körpers (d.h. für ein Proton ca. 1 Femtometer oder  $10^{-15}$  Meter) die Raumzeit flach ist und die Tilts der Hyperebenen im Unendlichen auf dieser Skala nicht groß sind, so daß der Basisraum  $\mathbb{B}^d$  (näherungsweise) als eine klassische (gekrümmte) Raumzeit betrachtet werden kann.

Die Herleitung der Riemannschen Mannigfaltigkeit  $\mathbb{M}^d$  als Kontinuumslices des Basisraums  $\mathbb{B}^d$  scheint natürlich möglich, wobei die Translations- oder Tangentenräume  $\mathbb{T}^d(\mathcal{B})$  in jedem Punkt  $P$  zu den Tangentialräumen der Differentiale werden. Identifiziert man in der kanonischen Basis die nicht-verschwindenden Komponenten der Quadriken  $Q(P)$  mit der Metrik  $g_{\mu\nu}(P)$ , dann scheint ein Kontinuumslices im  $\mathbb{B}^d$  möglich, in dem Differenzen zu Differentialen werden und Christoffelsymbole  $\Gamma_{\mu\nu}^\kappa$  (Zusammenhang bzw. ‚connection‘), Krümmungstensor  $R_{\mu\nu\lambda}^\kappa$  sowie der Einstein-Tensor  $G_{\mu\nu} = \mathcal{G}[g_{\mu\nu}]$  in Gl. (9) aus Differenzen der Quadriken  $Q(P)$  ableitbar (siehe Schritt **S1** auf S. 59). Für die Herleitung der Einstein-Gleichung (8),  $G_{\mu\nu}(P) = \kappa T_{\mu\nu}(P)$ , muß allerdings auch der Energie-Impuls-Tensor  $T_{\mu\nu}(P)$  aus Differenzen der Projektivitäten  $\Psi(P)$  abgeleitet werden, was der spannendere Teil des Kontinuumslices ist (Schritt **S3** auf S. 59). Interessanterweise sind die Standardausdrücke für den Energie-Impuls-Tensor und die Materie-Ströme

$$\begin{aligned} T_{\mu\nu}(P) &= i\bar{\psi}\gamma_\mu\partial_\nu\psi \\ J_\mu^a(P) &= \bar{\psi}T_a\gamma_\mu\psi \end{aligned} \quad (39)$$

(als erhaltene Noether-Ströme) quadratisch in den Teilchenfeldern  $\psi(P)$ , was die Möglichkeit der Herleitung aus  $Q(P) = \Psi^t(P)I_- \Psi(P)$  plausibel macht.

### Yang-Mills-Gleichungen des Hauptfaserbündels $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$

Mit dem Kontinuumslices müssen nicht nur das finite Analogon der Einstein-Gleichung (8) und der Energie-Impuls-Tensor (11), sondern auch die „Zusammenhänge in Hauptfa-

serbündeln“ und die Yang-Mills-Gleichungen (13) aus den Quadriken  $Q(P)$  abgeleitet werden (siehe Schritt **S2** auf S. 59). Während die Metrik  $g_{\mu\nu}$  (7) der Raumzeit relativ einfach mit den entsprechenden Komponenten der Quadrik (in ihrer lokalen Standardbasis) identifiziert werden kann, ist die analoge Definition der kontinuierlichen Eichfelder  $\phi_\mu^a(P)$  (14), d.h. der differentialgeometrischen Zusammenhänge  $A_\mu$  des Hauptfaserbündels  $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$  (anstelle der Christoffelsymbole  $\Gamma_{\mu\nu}^\kappa$ ) und der Feldstärke-Tensoren  $F_{\mu\nu} = \mathcal{F}[\phi_\mu^a(P)]$  (anstelle des Krümmungstensors  $R_{\mu\nu\lambda}^\kappa$ ) nicht so einfach. Das liegt daran, dass die Eichfelder  $\phi_\mu^a(P)$  - im Gegensatz zur Metrik  $g_{\mu\nu}(P)$  - keine Komponenten der Quadrik  $Q(P)$  sind, sondern Eich-Transformationen  $\Psi_E(P, x_\mu)$  parametrisieren. Wenn dies im Einzelnen gelingt, ist der wesentliche Schritt für eine einheitliche Beschreibung von Raum, Zeit und Materie gemacht.

## 6 Ursprung der Quantenphänomene: Zustände in überlagernden linearen Hüllen

Es scheint hart, dem Herrgott in die Karten zu gucken. Aber dass er würfelt und sich telepathischer Mittel bedient (wie es ihm von der gegenwärtigen Quantentheorie zugemutet wird), kann ich keinen Augenblick glauben.

Albert Einstein, Brief an Cornelius Lanczos vom 21. März 1942.

Eine Eigenschaft der beobachtbaren Materie ist bisher nicht erwähnt worden: die in Abbildung 5 aufgeführten elementaren Teilchen sind ‚Quanten‘, die nicht-lokal verschränkt sind, sowie erzeugt und vernichtet werden können. Materie ist daher nicht einfach da, sondern kann spontan verschwinden sowie umgekehrt aus dem ‚Nichts‘ entstehen. Physiker sprechen lieber vom ‚Vakuum‘, um eine ‚leere‘ Raumzeit ohne Materie zu bezeichnen. Diese sogenannten ‚Quantenfluktuationen‘ zeigen zudem eine von Einstein so genannte ‚spukhafte Fernwirkung‘, da die Korrelationen der Teilchenentstehung und -vernichtung instantan über beliebig große Entfernungen korreliert sind. Um diese bemerkenswerte Eigenschaft der Quantenbahnen verstehen zu können, muß nun abschließend die Quantisierung des Weltmodells diskutiert werden.

### Kanonische Quantisierung: Wo bleibt die Einheit der Physik?

Um Quantenphänomene im Rahmen des oben in Kap. 2 skizzierten Standardmodells mathematisch beschreiben zu können, werden üblicherweise die in Gl. (12) eingeführten Teilchenfelder  $\psi(P)$  mathematisch zu *Quantenfeldern*  $\hat{\psi}(P)$ , die nicht mehr einfach Zahlenwerte einer physikalische Größe am Punkt  $P$  der Welt sind, sondern Operatoren, die Teilchen mit den physikalischen Eigenschaften von  $\psi$  am Punkt  $P$  erzeugen. Dafür wurden 1925-1930 von Werner Heisenberg und Paul Dirac die sogenannten *kanonischen Quantisierungsregeln*

$$\psi(P) \longrightarrow \hat{\psi}(P) = \sum_i \hat{a}_i \psi^{(i)}(P) \quad (40)$$

mit den sogenannten (*Anti-*)*Kommutatoren*

$$[\hat{a}_i, \hat{a}_j^\dagger]_\pm = \delta_{ij} \quad (41)$$

eingeführt, die mathematisch beschreiben, was unter Teilchenoperatoren  $\hat{\psi}$  zu verstehen ist und wie man von den klassischen physikalischen Größen, den sogenannten ‚Observablen‘  $\mathcal{O}(\psi)$

der Teilchenfelder, zu den zugeordneten Operatoren  $\hat{\mathcal{O}}$  kommt. Man kann sich einen Teilchenoperator  $\hat{\psi}(P)$  als ein *Ensemble*  $\mathcal{E} = \{\psi^{(i)}(P)\}$  von allen möglichen Werten  $\psi^{(i)}(P)$  für ein Teilchenfeld vorstellen. Eine wichtige Konsequenz der Quantisierung ist, dass physikalische Größen  $\mathcal{O}(\psi)$  dadurch ‚unbestimmt‘ sind und keine bestimmten Werte mehr haben, sondern nur noch Wahrscheinlichkeiten ‚besitzen‘, bestimmte Werte bei einer Messung zu zeigen.

Diese Quantenfeldtheorie der Materie ist mittlerweile nicht nur mathematisch konsistent und überzeugend formuliert, experimentell getestet und in allen Aspekten hervorragend bestätigt worden<sup>27</sup>, sondern sie hat auch zahlreiche Anwendungen in Festkörperphysik und Nanotechnologie gefunden<sup>28</sup> und völlig überraschende Effekte vorhergesagt, die vorher gar nicht denkbar waren.<sup>29</sup> Alle seltsamen Aspekte des Quantenverhaltens der Materie wurden empirisch bestätigt, insbesondere die Interferenz, Kontextualität und Nicht-Lokalität physikalischer Größen (siehe unten die Probleme **P1-P3**), so daß man abschließend sagen muss: elementare Teilchen sind Quanten.

Was bedeutet aber die Quantisierungsregel (40) für die Einstein-Gleichung (8), wenn auf der rechten Seite durch den Energie-Impulstensor (11) der Materie mathematisch nicht mehr Teilchenfelder (12) sondern Operatoren  $\hat{\psi}$  stehen, während auf der linken Seite sich aber klassische geometrische Größen wie die Metrik  $g_{\mu\nu}$  befinden. Dies ist die Frage nach der *Einheit der Physik*, nach der Einheit von Raum, Zeit und Materie, für die mit der Allgemeinen Relativitätstheorie und der Quantenfeldtheorie zwei mathematisch ‚wesensfremde‘ Theorien in Einklang gebracht werden müssen.

Die meisten Antwortversuche der letzten 100 Jahre gehen davon aus, dass die Quantentheorie wegen ihrer oben aufgeführten empirischen Überzeugungskraft gültig ist und die ART, d. h. die linke Seite der Einstein-Gleichung (8) dementsprechend modifiziert werden muss. Die Wheeler-DeWitt Gleichung, die ‚Loop Quantum Gravity‘ oder die ‚Dynamischen Triangulierungen‘ sind solche Versuche einer *Quantengravitationstheorie*, die zwar bemerkenswerte Erfolge erzielen konnten, es aber nachwievornicht geschafft haben, eine mathematisch konsistente Quantenversion der Einstein-Gleichung (8) zu formulieren. Einen völlig anderen Weg ging die ‚String-Theorie‘, die zwar auch von der Richtigkeit der Quantisierung ausging, aber anstelle von ‚Teilchen‘ völlig neue physikalische Objekte, sogenannte ‚Strings‘ oder ‚Branes‘ einführte und versuchte, die Geometrie von Raum und Zeit nur als emergente Eigenschaften dieser fundamentalen neuen Materieart zu begründen. Heute muß man sagen, dass es der Stringtheorie nicht gelungen ist, irgendeine Evidenz für ihre empirische Adäquatheit aufzuzeigen und sie hat sich zudem mathematisch als gar nicht erklärend für irgendeinen Aspekt der Welt erwiesen. Auch Theorien der Supersymmetrie bzw. der ‚Superräume‘ und der ‚Grand Unified Theories‘ des Standardmodells waren in keiner Weise erfolgreich, eine empirisch adäquate Ordnung in die verwirrende Vielfalt des in Abbildung 5 dargestellten Teilchenzoos zu bringen.

Das hier vorgeschlagene finite Weltmodell geht den umgekehrten Weg als die bisherigen Versuche, indem es Einsteins geometrischen Ansatz der Allgemeinen Relativitätstheorie als grundlegend ansieht und die Quantenphysik nur als ein emergentes Phänomen der Geometrie. Die Einstein-Gleichung (8) mitsamt dem Energie-Impuls-Tensor (11) wird in ihrer finiten Version als weitgehend richtig angenommen, während die Quantisierungsregel (40) als effekti-

<sup>27</sup>Linienspektren (Bunsen, Kirchhoff), diskrete Energieniveaus in Atomen (Franck-Hertz-Experiment, 1914), gequantelter Drehimpuls (Stern-Gerlach-Experiment, 1922), Photonen haben Teilchenimpuls (Compton, 1922), Interferenz von Elektronen am Doppelspalt (Davisson-Germer-Experiment, 1927).

<sup>28</sup>Supraleitung (Kamerlingh Onnes, 1911; Bardeen, Cooper, Schrieffer, 1957), Transistor (Shockley, Brattain, Bardeen, 1945), Quantenhalleffekt (Klaus von Klitzing, 1985), Quantencomputer.

<sup>29</sup>Suprafluidität bei tiefen Temperaturen (Kapiza, 1938), Laser (Maiman, 1960), Bose-Einstein-Kondensation (Cornell, Ketterle, Wiemann, 1995), Quantenteleportation (Zeilinger, 1997).

ve Beschreibung eines spezifischen Aspektes einer finiten Geometrie angesehen wird, nämlich der Überlagerung der linearen Hüllen-Umgebungen, wobei die Nicht-Lokalität gerade der Verschiedenheit der linearen Ordnungen in ihnen entspricht. Es soll also nun versucht werden, für die Quantenphänomene einen geometrischen Grund im Rahmen des finiten Weltmodells anzugeben.

## Quantisierung in finiten Geometrien: Zustand ‚realisierter‘ Punkte

Für einen permanent erscheinenden Raum ist es unabdingbar, dass ‚Nachbarschaft‘ und ‚Nähe‘ zusammenfallen. Um dies zu erreichen, wurde im vorherigen Abschnitt durch das Konzept der ‚linearen Hülle‘ der Begriff der ‚Umgebung eines Punktes‘ präzisiert und die verschiedenen Umgebungen der Nachbarpunkte in einen Faserraum ‚übereinander gelegt‘, wobei genau eine lineare Hülle als Basisraum  $\mathbb{B}^d$  ausgewählt wurde (siehe Abb. 13), in dem die lineare und quadratische Ordnung zusammenfallen und der im Kontinuumslimit in unseren Anschauungsraum übergeht (siehe Abb. 12).

Welche ‚physikalische‘ Bedeutung haben aber die anderen linearen Hüllen? Eine lineare Hülle gewinnt erst eine ‚physikalische‘ Bedeutung als Anschauungsraum, wenn durch einen makroskopischen Beobachter (ein gebundenes System) eine Umgebung als ‚klassischer‘ Basisraum eindeutig und stabil ausgewählt wurde: dann erscheinen alle geometrischen Freiheitsgrade in den Fasern als physikalische Phänomene, d. h. die Punkte in den anderen linearen Hüllen erscheinen in dieser ‚klassischen‘ Umgebung als Teilchen oder Materie: allerdings nicht mit bestimmten Bahnen, sondern nur als Wahrscheinlichkeit in einem bestimmten Punkt des Basisraums zu erscheinen.

Anstelle der Nachbarpunkte  $P \in Q(X)$  eines Punktes  $X \in \mathbb{B}_n^d$  (in der Faser  $\mathbb{F}(X)$  von  $X$ ) sollte man wegen der projektiven Struktur (18) vollständigshalber auch die Quadriken  $Q^{(P)}(X)$  bzw. ihre Linearisierung  $\Psi^{(P)}(X)$  angeben, wobei  $P$  nur noch ein Index zur Unterscheidung der verschiedenen Nachbarpunkte in der Faser  $\mathbb{F}(X)$  von  $X$  ist.<sup>30</sup> Anstelle des Quadrik-Feldes  $Q(P)$  über den Punkten  $P \in \mathbb{K}_p^d$  einer endlichen Geometrie  $\mathbb{K}_p^d$  genügt es, ein Ensemble

$$\mathcal{E}(X) := \{Q^{(P)}(X) = Q(P) \text{ mit } P \in Q(X)\} \quad (42)$$

der Quadriken  $Q(P)$  in den Nachbarpunkten  $P \in Q(X)$  von Punkten  $X \in \mathbb{B}_p^d$  im Basisraum anzugeben, da es die gleiche Information wie im vollen Feld  $Q(P)$  enthält, wenn jeder Punkt  $P$  zumindest einen Nachbarpunkt  $X \in \mathbb{B}_n^d$  im Basisraum hat. Der Punkt  $P$  bzw. die Quadrik  $Q(P)$  wird dadurch jedem Punkt  $X$  zugeordnet, der Nachbarpunkt zu  $P$  ist. Da dies keine eineindeutige Zuordnung ist,<sup>31</sup> ist die Umkehrung  $X \rightarrow P$  bzw.  $Q^{(P)}(X)$  vielfältig und kann nur durch ein Ensemble (42) ohne Informationsverlust beschrieben werden. Dieses Ensemble entspricht gerade der (linearen) Überlagerung vieler Zustände in der kanonischen Quantisierungsregel (40)

$$\Psi(P) \rightarrow \hat{\Psi}(X) := \{\Psi^{(P)}(X) = \Psi(P) \mid P \in \mathbb{F}(X)\} \hat{=} \mathcal{E}(X). \quad (43)$$

Im Quantenfeld  $\hat{\Psi}(X)$  ist die gleiche Information enthalten wie in  $\Psi(P)$ , nur anders sortiert: die Vielfalt liegt nicht mehr in den Punkten  $P$ , sondern in den möglichen Werten von  $\hat{\Psi}(X)$ .

<sup>30</sup>Um den Nachbarpunkt anzugeben, muss auch die Nachbargerade zu der Verbindungsgerade, etc. angeben. Aufgrund der Nachbarschaftssymmetrie ( $\mathbf{v}$ ) und den gemeinsamen Nachbarschaften im Unendlichen, ist die vollständige Angabe des Nachbarschaftspunktes  $P$  gerade die Quadrik  $Q(P)$  in diesem Nachbarpunkt. Mit anderen Worten  $Q^{(P)}(X)$  ist  $Q(P)$  im besetzten Punkte  $P \in Q(X)$ .

<sup>31</sup>Die Abbildung  $P \rightarrow X$  ist surjektiv aber nicht injektiv.

Bisher wurde die finite Geometrie  $\mathbb{K}_p^d$  eingeführt, um ‚mögliche‘ Nachbarpunkte von Punkten zu beschreiben. Ob diese möglichen Punkte überhaupt auch realisiert sind in einem Raum  $\mathbb{K}_p^d$ , scheint aber eine physikalische Frage zu sein. Empirisch offensichtlich ‚gibt es‘ die Punkte  $X$  unseres Anschauungsraumes und auch andere Punkte sind als Materie realisiert. Ob aber alle möglichen Punkte in diesem Netz von Nachbarschaftsbeziehungen auch tatsächlich existieren, ist schwierig zu entscheiden. Wenn die Punkte in den Fasern den vielfältigen Phänomenen der Natur entsprechen, dann muß es in den Fasern möglichst viel Freiheit in der Struktur der Punkte geben. Es macht daher Sinn, die Möglichkeit in Betracht zu ziehen, dass nicht alle möglichen Punkte auch in der Welt realisiert sind, und eine weitere geometrische Annahme über den *Zustand* der Welt zu machen:

(vi) Ein Zustand der Welt ist die Untermenge von ‚realisierten‘ Punkten  $P$  in  $\mathbb{K}_p^d$ .

Insbesondere bedeutet dies, dass ein Zustand in jedem Punkt nur eine Untermenge

$$Z(P) = Z^+(P) \cup Z^-(P) \subset Q(P) \quad (44)$$

von allen möglichen Nachbarpunkten  $Q(P)$  von  $P$  darstellt.<sup>32</sup> Diese Untermengen können nicht beliebig ausgewählt werden. Um die Annahme (iv) weiterhin zu erfüllen, muß sie aus zwei gleichgroßen Teilen  $Z^\pm(P)$  bestehen, da die Nachbarpunkte von  $P$  immer als Paare auftreten. Weiterhin impliziert die Annahme (v), d. h. die Involution (20) die modifizierte Wechselwirkungsrelation

$$P = Z^- \circ Z^+(P) \quad (45)$$

für alle Punkte  $P$ . Diese Konzeption eines Zustandes des Ereignisprozesses der Welt induziert eine Quantisierung der Projektivitäten  $\Psi(P)$ , die die Quadriken an den besetzten Punkten  $P$  erzeugen.

### Fermionische Besetzungszahlen der Quadriken: Anti-Kommutation der Teilchenfelder

Um den Zustand (eindeutig) zu bezeichnen, kann man auch *fermionische Besetzungszahlen*

$$n(P) \in \{0, 1\} \quad (46)$$

für jeden Punkt  $P$  einführen, so dass der Zustand

$$Z(P) = \{P' \in Q(P) \mid n(P') = 1\} \quad \text{mit} \quad |Z(P)| = \sum_{P' \in Q(P)} n(P') \quad (47)$$

gerade die Menge der ‚besetzten‘ Nachbarpunkte  $P'$  von  $P$  mit  $n(P') = 1$  ist. Diese Einführung von Besetzungszahlvariablen (46) ist die *Quantisierung im finiten Weltmodell*. Im Unterschied zur kanonischen Quantisierung (40) ist die finite Quantisierung keine zusätzliche Forderung, sondern nur eine Beschreibung eines (klassischen) Zustandes (44) und ein Umsortieren (43) des Quadrikfeldes  $Q(P)$ . Aufgrund der Wechselwirkung der Quadriken (Annahme (iv) und (v)) kann wie bei  $Z(P)$  der Wert von  $n(P)$  nicht unabhängig von den Besetzungszahlen der anderen Punkte gewählt werden. Es bleibt eine wichtige Aufgabe, solche Funktionen  $n(P)$  oder

---

<sup>32</sup>Diese Annahme (vi) entspricht der möglichen Existenz von ‚Null-Quadriken‘  $O(P)$  in Punkten  $P \in \mathbb{K}_p^d$ , d. h. von maximal entarteten Quadriken, die ‚leer‘ sind. Formal lassen sie sich in der Sequenz  $Q^k$  von entarteten Quadriken als die Quadriken  $Q^0(P)$  (im 0-dimensionalen Raum) einsortieren, die nur ihren eigenen Zentrumspunkt  $P$  enthalten.

$Z(P)$  anzugeben, die ‚elementaren‘ Zuständen wechselwirkungsfreier Felder entsprechen. Dies sind gerade solche, die zwar die Annahme **(iv)** aber nicht **(v)** erfüllen und vermutlich durch Symmetrie-Transformationen  $\Psi_0 \in \mathcal{S}$  erzeugt werden können.<sup>33</sup>

Führt man die Besetzungszahl  $n(P)$  als Vorfaktor  $n(P)Q(P)$  für die Quadrik  $Q(P)$  an diesem Punkt ein, muß die Linearisierung  $n(P)Q(P) = \Psi(P)I_- \Psi(P)$  zu Vorfaktoren  $\hat{a}_P$  der Transformationsmatrizen  $\hat{a}_P \Psi(P)$  führen, die die *Teilchenzahlrelation*

$$n(P) = \hat{a}^\dagger \hat{a} \quad (48)$$

erfüllen. Die Besetzungszahlen  $n \in \{0, 1\}$  können nur 0 oder 1 sein, d. h. ein Nachbarpunkt  $P$  von  $X$  kann da sein oder nicht. Deswegen folgt aus der quadratischen Relation (48) bereits, dass die Anti-Kommutatoren

$$[\hat{a}_P, \hat{a}_{P'}^\dagger]_+ = \delta_{PP'} \quad (49)$$

erfüllt sein müssen. Mit anderen Worten,  $\hat{a}_P$  und  $\hat{a}_P^\dagger$  müssen notwendigerweise fermionische Vernichtungs- und Erzeugungsoperatoren sein wie in der kanonischen Quantisierungsregel (40) mit dem Antikommutator (41) für Fermionen gefordert wird. Die Teilchenfeld-Operatoren lauten dann

$$\hat{\Psi}(X) = \sum_{P \in Z^+(X)} \hat{a}_P(X) \Psi^{(P)}(X) \quad \text{und} \quad \hat{\Psi}^\dagger(X) = \sum_{P \in Z^-(X)} \hat{a}_P^\dagger \Psi^{(P)^\dagger}(X), \quad (50)$$

wobei die Punkte  $X \in \mathbb{B}^d$  nur aus dem Basisraum sind, während die Punkte  $P \in \mathbb{F}(X)$  in den Fasern zu *Quantenzahlen* für den Zustand  $Z(X)$  in  $X$  werden. Anschaulich bedeutet der Erzeugungsoperator  $\hat{a}_P^\dagger(X)$ , dass in  $X$  ein Teilchen durch die Nachbarschaft zu  $P \in Z^-(X)$  entsteht, während der Vernichtungsoperator  $\hat{a}_P(X)$  anzeigt, dass das Teilchen in  $X$  verschwindet indem es zum Nachbarpunkt  $P \in Z^+(P)$  weitergeht, bzw. dort entsteht. Man beachte, dass der Vernichtungsoperator eigentlich ein Erzeugungsoperator in die raumzeitgespiegelte Richtung ist: von  $P$  aus betrachtet, erzeugt  $\hat{a}_P(X)$  ein Teilchen in  $P$ . Die Felder  $\Psi(P)$  sind dann nicht mehr Funktionen über alle Punkte  $P$  der Welt, sondern Operatoren  $\hat{\Psi}(X)$  über den Orten  $X \in \mathbb{B}_p^d$  der lokalen Raumzeitdomäne, die die Wahrscheinlichkeit angibt, ein Teilchen in  $X$  zu erzeugen.

### Bosonische Besetzungszahlen der Schnittquadriken: Kommutatoren der Eichfelder

Eine wichtige Frage bleibt, wie die Eichbosonen (siehe oben **F2-F4**: Gluonfelder  $g_\mu^j(P)$ , schwachen Vektorfelder  $W_\mu^\pm(P)$  und  $Z_\mu^0(P)$ , Photonfelder  $\gamma_\mu(P)$ ) im Teilchenzoo der Abbildung 5 mit ihren kanonischen Vertauschungsrelationen  $[\hat{a}_i, \hat{a}_j^\dagger]_+ = \delta_{ij}$  in der Quantisierungsregel (40) für Bosonen im Rahmen der finiten Geometrie eingeführt werden können.

Während die Quantisierungsregel für Teilchenfelder  $\Psi(P)$  durch Besetzungszahlen (46) der Punkte  $P \in Q(X)$  gegeben ist und damit die Nachbarschaftsstruktur  $Q(X)$  charakterisieren, markieren die Eichfelder (36), welcher Punkt der Schnittquadrik  $Q^k(X, P)$  ausgewählt wird. Eichfelder parametrisieren daher die Symmetrie-Transformationen  $\Psi_E$  und nicht die Transformationsmatrix (24) in  $X$ . Im Gegensatz zu den nicht-singulären Quadriken  $Q(P)$

---

<sup>33</sup>Ein wichtiger Test der Zustandsannahme **(vi)** wäre die Herleitung einer sogenannten Dispersionsrelation für wechselwirkungsfreie Felder, die im Kontinuumslimit in die Diracgleichung übergeht (siehe Schritt **S2** unten auf S. 59).

sind die Wechselwirkungsquadriken  $Q^k(X, P) \in \mathbb{W}$  entartet und ‚leben‘ nur in einem linearen (projektiven) Unterraum  $\mathfrak{P}\mathbb{W}_p^k(X, P)$ . Die Invarianz von

$$\Psi_E^t Q^k(X, P) \Psi_E = N Q^k(X, P) \quad \text{mit } N \in \mathbb{K}_p \quad (51)$$

unter einer Eichtransformation  $\Psi_E \in G(k)$  muß daher nur bis auf einen beliebigen Faktor  $N \in \mathbb{K}_p$  erfüllt sein, da die projektive Normierung von  $Q(P)$  davon unberührt bleibt. Wie die fermionische Besetzungszahl  $n(P)$  als Vorfaktor  $n(P)Q(P)$  einer Quadrik, können wir Vorfaktoren  $\hat{b}_P$  der Transformationsmatrizen  $\hat{b}_P \Psi_E(X, P)$  einführen, die die *Teilchenzahlrelation*

$$N(P) = \hat{b}_P^\dagger \hat{b}_P \quad (52)$$

erfüllen müssen. Im Gegensatz zu  $n(P) \in \{0, 1\}$  in Gl. (46) muß nun allerdings  $N \in \mathbb{K}_p$  gelten. Damit folgt aus der quadratischen Relation (52) bereits, dass die Kommutatoren

$$\left[ \hat{b}_P, \hat{b}_{P'}^\dagger \right]_- = \delta_{PP'} \quad (53)$$

erfüllt sein müssen. Mit anderen Worten,  $\hat{b}_P$  und  $\hat{b}_P^\dagger$  müssen notwendigerweise bosonische Vernichtungs- und Erzeugungsoperatoren sein wie in der kanonischen Quantisierungsregel (40) mit dem Kommutator (41) für Bosonen gefordert wird.

Sowohl für fermionische Teilchenfelder wie für bosonische Eichfelder folgt also in dem finiten Weltmodell ihre kanonische Quantisierung in natürliche Weise. Die Menge der Basispunkte  $X$  mit ihren Punkten im Unendlichen, d. h. die kanonische Basis ist der **Vakuumzustand**, der invariant unter der Translationsgruppe (37) ist. Im weiteren nehmen wir an, dass die Punkte  $X \in \mathbb{B}_p^d$  alle (!) existieren, d. h.  $n(X) = 1$  ist und keine (Besetzungszahl-)Fluktuationen aufweisen. Wir verlassen damit das Regime der Quantengravitation und betrachten nur Quantenphänomene in den Materiefeldern. Natürlich können weiterhin die Quadriken  $Q(X)$  in den Punkten  $X$  verschieden sein, so dass Phänomene der Allgemeinen Relativitätstheorie einer gekrümmten Raumzeit, d.h. der klassischen Gravitation auftreten können, aber keine der Quantengravitation.

Es bleibt zu untersuchen, wie in dieser Quantenwelt der finiten projektiven Geometrie auch für die Materie-Freiheitsgrade ein klassischer Limes erreicht wird, der zu klassisch sich verhaltenden Feldern auf dem Basisraum führt. Ein wichtiger Schritt dahin ist zu zeigen, dass eine **Dekohärenz von Quantenzuständen** durch Festlegung einer bestimmten linearen Hülle (Basisraum) für große gebundene Systeme entsteht. Der **Messprozess** entspricht dann nur der ‚Anbindung‘ von Quanten an diese gebundenen Systeme und damit ihrem permanenten Verbleiben im Basisraum.

## Quantenphänomene: Interferenz, Kontextualität und Nicht-Lokalität

In gewisser Weise kann das hier vorgestellte Weltmodell als eine ‚Theorie verborgener Variablen‘ der Quantenphänomene angesehen werden, da ihr eine klassische Geometrie der Welt zugrunde liegt. Ein wichtiger Test wäre zu zeigen, dass die Quantisierung (46) durch die Überlagerung (43) der linearen Hüllen genau auf die gleichen Quantenphänomene wie die kanonischen Quantisierungsregeln (40) führt. Durch diese sind mindestens drei neue physikalische Fragen entstanden, die bis heute nicht befriedigend beantwortet und teilweise als ‚No-Go-Theoreme‘ oder ‚Unmöglichkeitbeweis über verborgene Variablen‘ bezeichnet worden sind. Jede alternative Theorie von Quantenphänomenen muß diese experimentell gut



Abbildung 15: Eine ‚Blätterwelt‘ besteht aus Überlagerung vieler verschiedener (ähnlicher aber nicht kompatibler) Inhalte an einem Ort. Die verschiedenen ‚Weltblätter‘ der finiten Geometrie verschmelzen allerdings für große Abstände in eine gemeinsame Raumzeit mit klassischen (elektromagnetischen) Feldern. (Quelle: [www.stadtmagazin.com/homburg/blaetter\\_welt](http://www.stadtmagazin.com/homburg/blaetter_welt))

überprüften Quanteneigenschaften erklären können. Es gibt drei zentrale Eigenschaften, in denen Quantensysteme sich von klassischen Systemen unterscheidet und die aufgrund ihrer Abweichung von der natürlichen Anschauung zu philosophischen Interpretationsproblemen der Quantentheorie wurden, insbesondere ihrer Ontologie und Erkenntnistheorie.

## P1. Interferenz und Wahrscheinlichkeitsamplituden

Was bedeutet die Überlagerung von physikalischen Eigenschaften? Wenn die fundamentalen physikalischen Objekte Operatoren  $\hat{\psi}$  sind und die physikalischen Zustände aus einer (linearen) Superposition von Eigenschaften bestehen, wie kommen dann bestimmte Werte für die dazugehörigen physikalischen Größen zustande? Dies ist die Frage nach der Bedeutung der *Wahrscheinlichkeit*  $\mathcal{P}(M)$  von Messwerten  $M$  sowie nach der *Interpretation der Quantenphysik*, die diese Unbestimmtheit physikalischer Größen sinnvoll begründet.

Berühmt wurde dieses **Interferenzproblem physikalischer Größen** neben dem Doppelspaltexperiment vor allem durch ‚Schrödingers Katze‘ und das Paradox, dass sie quantentheoretisch sowohl lebt als auch tot ist - solange keine Messung ihres Status ‚wirklich‘ erfolgt.

Früher wurde dieses Paradox durch die ‚Kopenhagener Interpretation‘ (Niels Bohr, 1927) dahingehend gelöst, dass einem ‚Beobachter‘ eine fundamentale Bedeutung zugeschrieben wurde, der durch (bewußte) Messungen die Wahrscheinlichkeit möglicher Werte spontan in einen wirklich existierenden eindeutigen Wert verwandelt. Heute würden die meisten Physiker hingegen sagen, dass dieser ‚Kollaps der Wellenfunktion‘  $\psi(P)$  quantendynamisch von selber erfolgt ohne die Einwirkung eines Beobachters, da *Dekohärenz* eine intrinsische Eigenschaft von Quantensystemen ist, die dazu führt, dass makroskopische Objekte sich in empirisch-eindeutige Zustände mit (nahezu) bestimmten Werten ihrer physikalischen Eigenschaften entwickeln. Diese Dekohärenz jeglicher Quantendynamik ist mittlerweile in der Tat

experimentell gut bestätigt worden. Es bleibt aber die prinzipielle ontologische Frage nach dem Ursprung der Unbestimmtheit physikalischer Größen, selbst wenn sie durch Dekohärenz zu klein wird, um jemals gemessen werden zu können. Bereits 1957 schlug Hugh Everett eine *Viele-Welten-Interpretation* der Quantenphysik vor, die davon ausgeht, dass die Welt sich zu jedem Zeitpunkt in viele alternative Welten verzweigt und jeder Wert einer physikalischen Observablen in einer dieser Welten tatsächlich realisiert wird, d. h. ein Kollaps gar nicht stattfindet. Ein bisher wenig überzeugender Aspekt dieser Idee sind allerdings die ontologischen Fragen, was ‚zu jedem Zeitpunkt‘ bedeutet und wieso überhaupt ständig unzählige neue Welten entstehen sollten, die ontologisch nur eingeführt werden, um ein Paradox aufzulösen, aber ansonsten keine weitere Erklärungskraft haben und deswegen Ockhams Rasiermesser zum Opfer fallen müßten.

In der kanonischen Quantisierungsregel (40) drückt sich diese neue Eigenschaft der Interferenz und Unbestimmtheit der physikalischen Teilchenfelder  $\hat{\psi}(P)$  darin aus, dass sie als Operatoren ein Ensemble  $\{\psi^{(i)}(P)\}$  von Werten darstellen und man nur noch nach der sogenannten *Bornschen Regel*

$$\mathcal{P}(M) = \|\psi(M)\|^2 \quad (54)$$

die Wahrscheinlichkeit  $\mathcal{P}(M)$  angeben kann, dass ein bestimmter Messwert  $M(\psi(P))$  gemessen wird. Jede Theorie über den Ursprung der Quanteninterferenz muß vor allem auch eine natürliche Erklärung der Bornschen Regel (54) geben, dass  $\mathcal{P}(M)$  durch das Betragsquadrat der sogenannten *Wellenfunktion*  $\psi(M)$  der physikalischen Größe gegeben ist, die sich aus den oben eingeführten Teilchenfeldern  $\psi(P)$  über den Orten  $P$  ( $\psi(P)$  ist die Wellenfunktionen für die Messgröße ‚Ort‘  $P$ ) ableiten läßt. Woher dieses Quadrat kommt, ist bisher völlig ungeklärt und man erinnert sich an die Frage von Ehrenfest nach dem Grund für die Bedeutung des Quadrats in der Abstandsbestimmung (6) der Allgemeinen Relativitätstheorie [14].

Das hier vorgeschlagene finite Weltmodell kann vielleicht eine natürlich erscheinende Antwort darauf geben, woher die Fluktuationen der Quanten und damit die Unbestimmtheit der physikalischen Größen kommen: durch die Überlagerung (lineare Superposition) der verschiedenen linearen Hüllen-Umgebungen, die in jedem Raumzeitpunkt miteinander verbunden sind und dadurch den Anschein vieler Welten erzeugt. Für große makroskopische Objekte wird *eine* lineare Hülle fixiert.

Das Theorem von Veblen und Young besagt, daß jede endliche Geometrie eine Vektorraumstruktur aufweist, d.h. als  $\mathfrak{B}\mathbb{K}_n^d$  über einen endlichen Körper  $\mathbb{K}_n$  koordiniert werden kann. Dies ist ein entscheidender Unterschied zu kontinuierlichen Geometrien. Zwar gibt es auch z.B. den reellen projektiven Raum  $\mathfrak{B}\mathbb{R}_n^d$  als eine kontinuierliche homogene Geometrie über den reellen Zahlen  $\mathbb{R}$ , aber die inhomogenen Geometrien weisen eine Vektorraumstruktur - wie von Riemann eingeführt - nur *lokal als Tangentialraum* auf. Um (Vektor-)Felder für Teilchen mit linearen Bewegungsgleichungen (Maxwell, Schrödinger, Dirac) einführen zu können, bleibt daher als Möglichkeit nur, *Vektorbündel für Teilchenfreiheitsgrade* zu definieren, d.h. eine zusätzliche Vektorraumstruktur an die Punkte einer Riemannschen Mannigfaltigkeit zu heften. In endlichen Geometrien erhält man hingegen auch für inhomogene Räume eine lineare Vektorraumstruktur intrinsisch, da der *finite Tangentialraum* der lineare Spann  $\mathbb{T}^d(\mathcal{B})$  einer ausgewählten Basis  $\mathcal{B}$  im finiten Raum und deswegen automatisch in ihm eingebettet ist. Mit anderen Worten, ein *finite Vektorbündel* entsteht auf natürliche Weise in jeder finiten Geometrie durch die Wahl einer Basis  $\mathcal{B}(X)$  in jedem Punkt  $X \in \mathbb{B}^d$  eines Basisraums  $\mathbb{B}^d$ .

Mit den finiten Geometrien  $\mathbb{K}_p^d$  haben wir also eine geometrische Grundlage, um Interferenz anders zu denken, nämlich als Überlagerung der vielen linearen Basisordnungen und nicht als zusätzlich zu postulierende Vektorbündelstruktur von Wellenfunktionen. Eine Dekohärenz

dieser Interferenz findet dann natürlicherweise durch die für große zusammenhängende Objekte zwingende Persistenz einer dieser linearen Welten statt. Die Existenz vieler Welten ist damit kein zusätzliches Postulat einer Vielen-Welten-Interpretation der Quantisierungsregeln (40), sondern nur die Verschiedenheit der vielen linearen Basisordnungen innerhalb einer finiten Geometrie. Ein makroskopischer Beobachter bzw. Messapparat legt eine dieser linearen Basisordnungen fest, den Basisraum bei Gl. (43), da er als gebundenes System nur in einer Basis seine (miteinander wechselwirkenden) Teile zusammenhalten kann. Schrödingers Katze ist daher weder tot noch lebendig, sondern beides je nachdem in welcher Ordnung sie von einem Beobachter betrachtet wird. Anschaulich bedeutet die Dekohärenz, dass die vielen Blätter in der Blätterwelt von Abb. 15 an manchen Stellen verschmelzen und identisch werden, d.h. ein Quanten (Punkte verschiedener Blättes) an das Blatt (lineare Hülle) eines makroskopischen Objektes angeheftet werden.

Ein wichtiger Test des finiten Weltmodells wäre die Erklärung der Bornschen Regel (54) aus der Quadrik  $Q$ , d. h. wie beim geometrischen Abstand (6) aus der Nachbarschaftsrelation (iv). Dass dies möglich ist, wird durch die Darstellung (21) einer Quadrik  $Q = \Psi^t I \Psi$  durch das Quadrat einer Transformationsmatrix  $\Psi$  nahegelegt, die durch ein Teilchen-Feld  $\Psi(P)$  parametrisiert werden kann. Die Wahrscheinlichkeit  $\mathcal{P}(P)$  ein Teilchen am Ort  $P$  zu erzeugen, wäre dann einfach die Anzahl der (besetzten) Nachbarpunkte.

## P2 Kontextualität und Realität

Was bedeutet der Messprozess? Auch wenn das erste Problem **P1** des Ursprungs der Interferenz und Wahrscheinlichkeit geklärt wäre, würde ein zweites Problem bestehen bleiben: die Unbestimmtheit bestimmter Messwerte, die durch Heisenbergs Unbestimmtheitsrelation

$$\Delta x \Delta p \geq \frac{1}{2} \|\psi([\hat{x}, \hat{p}])\| = \frac{\hbar}{2} \quad (55)$$

für die Streuung der Werte von Ort  $x$  und Impuls  $p$  eines Teilchens berühmt geworden ist. Manche physikalische Größen sind komplementär bzw. inkompatibel, d. h. ihre Wert schließen sich bei einer Messung gegenseitig aus und können nicht gleichzeitig gemessen werden. Da erst bei einer Messung entschieden wird, welche, der nicht miteinander verträglichen Werte, tatsächlich realisiert werden, kann man dies das ‚Realismusproblem‘ bzw. besser **Kontextualitätsproblem physikalischer Größen** nennen. In der kanonischen Quantisierungsregel (40) drückt sich diese neue Quanteneigenschaft der Kontextualität der physikalischen Teilchenfelder  $\hat{\psi}(P)$  darin aus, dass das Ensemble  $\{\psi(P)\}$  nicht allein die zukünftigen Messungen bestimmt, sondern erst der Messprozess eine entscheidende Rolle spielt. Es gibt daher keinen Zustand eines quantenphysikalischen Systems, in dem Ort und Impuls zugleich bestimmte Werte haben. Im quantenphysikalischen Modell findet diese Unbestimmtheit ihren mathematischen Ausdruck in der *Nichtvertauschbarkeit* der Operatoren.<sup>34</sup> Wie paradox die Überlagerung nicht kompatibler geometrischer Größen (wie unterschiedliche Perspektivrichtungen) in einem gemeinsamen Raum erscheint, hat Maurits Cornelis Escher in seinem Bild *Relativity* (1953) gut dargestellt (Abb. 16). Die vielen Blätter in der Blätterwelt von Abb. 15 sind sicherlich nicht miteinander verträglich, sondern einander widersprechend.

Mit den finiten Geometrien  $\mathbb{K}_p^d$  haben wir aber nun eine geometrische Grundlage, um Kontextualität neu zu denken, nämlich durch die Auswahl einer bestimmten linearen Basisordnung durch einen makroskopisch gebundenen Messapparat. Welche der inkompatiblen

---

<sup>34</sup> $[\hat{x}, \hat{p}] = i\hbar$ : Wenn alle Operatoren kommutieren würden, könnte man gemeinsam diagonalisieren und alle Werte gemäß ihrer Wahrscheinlichkeit nach der Bornregel (54) messen.

physikalischen Größen tatsächlich gemessen wird, hängt natürlicherweise von der Auswahl einer bestimmten linearen Basisordnung auf großen Skalen ab, d. h. von der Wahl des Basisraums in Gl. (43). Ein wichtiger Test des finiten Weltmodells wäre die Herleitung der quantentheoretischen Kommutatoren  $[\hat{x}, \hat{p}] = i\hbar$  in Gl. (55) für physikalische Größen wie Ort und Impuls im finiten Basisraum  $\mathbb{B}^d$  aus der finiten Quantisierungsregel (49) für die Amplituden  $\hat{a}_P$  und  $\hat{a}_P^\dagger$ .

### P3. Verschränkung und Nicht-Lokalität

Der unverständlichste Aspekt der Quantenphysik ist sicherlich die Nicht-Lokalität von Effekten. Albert Einstein schrieb am 3. März 1947 an Max Born:

Ich kann aber deshalb nicht ernsthaft daran glauben, weil die Theorie mit dem Grundsatz unvereinbar ist, dass die Physik eine Wirklichkeit in Raum und Zeit darstellen soll, ohne spukhafte Fernwirkungen.

Berühmt wurde dieses Problem durch das Einstein-Podolsky-Rosen-Paradox, dass nämlich die Spins zweier weit voneinander entfernten Elektronen verschränkt sind und sich nur gemeinsam ändern. Dies ist im Rahmen der geometrischen Allgemeinen Relativitätstheorie zwar nicht unmöglich, solange keine klassische Information durch den Effekt übertragen werden kann, aber warum eine solche (relativistisch konsistente) Nicht-Lokalität dennoch möglich ist, blieb bis heute prinzipiell unverstanden, weshalb Albert Einstein sie „spukhafte Fernwirkung“ nannte und er die Quantentheorie nicht als eine grundlegende Theorie akzeptieren wollte. Generell spricht man von verschränkten Zuständen, bzw. von *Verschränkung von Quanten* an verschiedenen Raumzeitpunkten, die zwar in der Vergangenheit durch eine lokale Wechselwirkung entstanden ist, aber globale instantane Änderungen an weit auseinanderliegenden Raumzeitpunkten möglich macht.

1964 gab John Stewart Bell ein quantitatives Maß für die Nicht-Lokalität verschränkter Zustände an und machte dadurch einen experimentellen Test der Nicht-Lokalität möglich. Die sogenannte *Bellsche Ungleichung*

$$1 + P(\vec{b}, \vec{c}) \geq \left| P(\vec{a}, \vec{b}) - P(\vec{a}, \vec{c}) \right| \quad (56)$$

für bestimmte Korrelationen  $P(\vec{b}, \vec{c})$  physikalischer Größen muß bei allen realistischen lokalen Theorien erfüllt sein, wird aber in der Quantentheorie verletzt. Experimentell ist mittlerweile die Nicht-Lokalität der Quantenphysik, insbesondere der EPR-Effekt, sehr gut bestätigt worden. Vor allem die Messungen von Alan Aspect zur Verletzung der Bellschen Ungleichung sowie die Experimente von Anton Zeilinger zur Quantenteleportation sind bekannt und in vielen populärwissenschaftlichen Büchern medienwirksam dargestellt worden. Da die quantentheoretisch mögliche Verschränkung und die dadurch resultierende Nicht-Lokalität von Quantenfluktuationen dem Lokalisierungsprinzip der Allgemeinen Relativitätstheorie widerspricht, haben wir für jedes klassisch geometrische Weltmodell ein ‚Verschränkungsproblem‘ bzw. besser ein **Lokalitätsproblem physikalischer Größen**.

Mit den finiten Geometrien  $\mathbb{K}_p^d$  haben wir aber nun eine geometrische Grundlage, um Nicht-Lokalität anders zu denken als in der kontinuierlichen Allgemeinen Relativitätstheorie, nämlich als ein *Auseinanderfallen von Nachbarschaft und Nähe*: Nachbarpunkte müssen eben nicht in der lokalen Umgebung eines Punktes liegen. Fernwirkung und Nicht-Lokalität (der Quantenphysik) kann man erst in Bezug auf einen lokalen Raum definieren: in kontinuierlichen (metrischen) Geometrien ist dies der Raum selber, da ein lokaler Umgebungsbegriff bereits

aus der Metrik folgt; in finiten Geometrien ist dieser lokal stabile Bezugsraum definiert durch die Auswahl einer linearen Hüllenumgebung als ein Basisraum  $\mathbb{B}^d$ , wodurch allerdings eine Nicht-Lokalität der nächsten Nachbarn entsteht.

In der kanonischen Quantisierungsregel (40) drückt sich diese neue Eigenschaft der **Verschränkung und Nicht-Lokalität** physikalischer Teilchenfelder  $\hat{\psi}(P)$  darin aus, dass ihre Werte  $\psi(P)$  des Operators  $\hat{\psi}(P)$  Funktionen des Ortes  $P$  sind, an denen sie z. B. bei einer Messung instantan gemeinsam realisiert werden.

Mit den finiten Geometrien  $\mathbb{K}_p^d$  haben wir aber nun eine geometrische Grundlage, um Verschränkung neu zu denken. Im kontinuierlichen Anschauungsraum  $\mathbb{R}^d$  haben zwei Kreise mit Radius 1 keinen gemeinsamen Schnittpunkt, wenn der Abstand ihrer Mittelpunkte größer als 2 ist. In endlichen Geometrien  $\mathbb{K}_p^d$  aufgrund der Nicht-Lokalität der Nachbarpunkte (Quadrikkpunkte, siehe Abb. 11 links) können die Zentren der Quadriken beliebig entfernt sein und dennoch eine niederdimensionale Quadrik als gemeinsamen Schnitt haben. Aber ob diese geometrische ‚Verschränkung‘ der quantenphysikalischen entspricht, ist völlig offen. Ein wichtiger Test des finiten Weltmodells wäre die Verletzung der Bellschen Ungleichung (56) für Korrelationen der in Gl. (43) eingeführten Felder  $\Psi^{(P)}(X)$ .

Diese drei fundamentalen Fragen - nach dem Ursprung der Quantenfluktuationen bzw. der vielen Welten, nach der Kontextualität der physikalischen Größen und nach dem Grund ihrer Nicht-Lokalität - können hoffentlich durch das hier vorgestellte finite Weltmodell überzeugend beantwortet werden. Zumindest ist ein Weg denkbar geworden, die Operatoreigenschaft von  $\hat{\Psi}$  nicht als eine zusätzliche Forderung an die Materiefelder  $\Psi(P)$  zu verstehen, sondern als Ausdruck der komplizierten Ordnung von Punkten  $P$  in finiten Geometrien  $\mathbb{K}_p^d$ . Quantenmaterie sind dabei nur Punkte  $P$  von quadratischen Form  $Q(X)$ , die Nachfolgebeziehungen für Raumzeitpunkte  $X$  regeln. Materieverteilungen, d. h. Teilchenfelder  $\Psi(P)$  sind automatisch quantisiert aufgrund der Überlagerung verschiedener geometrischer Ordnungen. Mit anderen Worten, Quantenphänomene sind Ausdruck der Geometrie der Welt und keine zusätzlich zu fordernde Eigenschaft der Materie.

Paul Ehrenfests anfänglich gestellte Frage nach dem Grund für die Bedeutung ‚des Quadratischen‘ [14] angesichts der Metrik (6) in Einsteins Allgemeiner Relativitätstheorie wurde durch die quantenphysikalische Bornregel (54) und die Eichsymmetrie der Wechselwirkungen im Standardmodell noch dringlicher. Durch das finite Weltmodell bekommt sie eine fundamentale Antwort: Alle drei Fälle haben ihren Ursprung in der Nachfolgerrelation (iv) von Ereignissen, die durch eine quadratische Form, eine Quadrik (7) ausgedrückt werden kann. **Die Quantentheorie ist die Linearisierung dieser quadratischen Nachbarschaftsrelation (iv).** Die Metrik (6) der Allgemeinen Relativitätstheorie findet sich dadurch auch in der Bornregel (54) und der eichinvarianten Wechselwirkung (45) von Quantenfeldern wieder. Abschließend kann man sagen

### Quanten sind linearisierte Quadriken.

Richtig verständlich ist dieser ‚quantenphysikalische‘ Aspekt des finiten Weltmodells zugebenermaßen nicht. Es sind bisher nur vage Ideen, die mathematisch ausgearbeitet werden müssen. Noch spekulativer wird es, wenn man sich die ultimative Frage stellt, woher überhaupt die geometrische Struktur der Welt kommt. Die bisherige abstrakte mathematische Diskussion war notwendig, um zu motivieren, dass unsere Sinne uns eventuell trügen und tatsächlich eine finite Geometrie  $\mathbb{K}_p^d$  unserem Anschauungsraum zugrunde liegt, bzw. zumindest mathematisch denkmöglich ist. Doch woher kommt die Geometrie der Welt? Wieso sollen wir die obigen Annahmen (i)- (vi) über Punkte und die sie verbindenden Linien und ordnende Quadriken

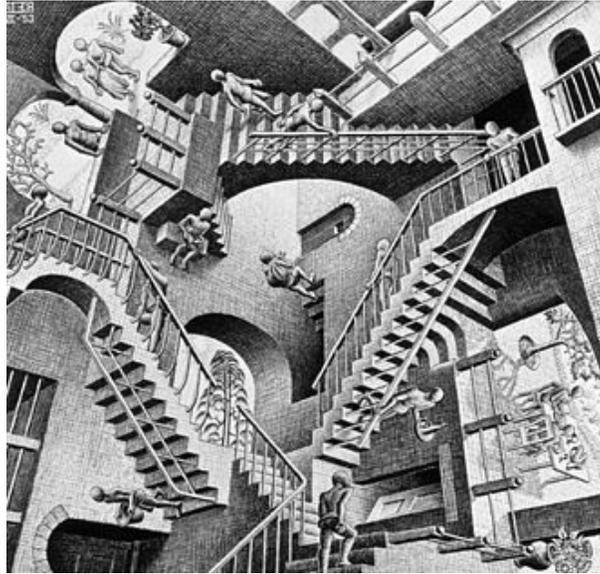


Abbildung 16: Maurits Cornelis Escher, *Relativity* (1953): Inkommensurabilität von Richtungen (orthogonale Basen), die im gemeinsamen Raum überlagert sind. Heisenbergs Unbestimmtheitsrelation drückt aus, dass zwei inkommensurable Größen nicht gleichzeitig scharf gemessen werden können. (Quelle: [en.wikipedia.org/wiki/Relativity\\_\(M.\\_C.\\_Escher\)](http://en.wikipedia.org/wiki/Relativity_(M._C._Escher)))

überhaupt machen? Eine Antwort auf diese philosophischen Fragen bietet möglicherweise die eingangs erwähnte Prozessontologie von Alfred North Whitehead [3].

## 7 Ursprung der Geometrie: Prozess von Ereignissen im Raum der Möglichkeiten

Das durch die Arbeit in den exakten Wissenschaften geschärfte Erkenntnisgewissen macht es Unsereinem nicht leicht, den Mut zur philosophischen Aussage zu finden. Ganz ohne Kompromiß kommt man da nicht durch.  
Hermann Weyl, *Erkenntnis und Besinnung* (1955).

Bisher sind wir von den mathematischen Eigenschaften finiter, projektiver Geometrien ausgegangen - ohne uns wirklich Rechenschaft über die verwendeten Grundbegriffe zu geben. Wir müssen nun abschließend klären, welchen Sinn es macht, von Punkten und Geraden, von ihren Schnittrelationen und Quadrikstrukturen als der Grundlage der Welt zu sprechen. Denn ein Weltmodell wie die hier vorgestellte finite Geometrie beruht auf Symbolen und Begriffen, die nicht von selbst verstehbar sind. Im Rahmen eines Modells kann man zwar bestimmte Eigenschaften der Welt ableiten und dadurch Erfahrungen erklären, man kann aber weder über Sinn noch Bedeutung reden, die man erst versteht, wenn das Modell in einen Begründungskontext übersetzt wurde. Ein Weltbild versucht dafür einen stimmigen Versterahmen zu entwerfen, in dem jeder Grundbegriff und jede Aussage eines Weltmodells konsistent interpretiert werden kann. Es ist nicht Ziel dieses Kapitels die grundlegenden Fragen der Wissenschaftsphilosophie zu diskutieren, sondern nur Interpretationsmöglichkeiten des eingeführten finiten Weltmodells aufzuzeigen.

## Elemente der Geometrie: Ereignispunkte und Ereignisfolgen

Nachdem Materie als geometrische Inhomogenitäten (geometrische ‚Fluktuationen‘ der Quadriken) mit Kräften als Nachbarschaftssymmetrie (Annahme **(v)**) verstanden wurden, die kontinuierliche Raumzeit als geometrische Ordnung der Quadriken (Annahme **(iv)**) und selbst die Quantenphänomene der Materie möglicherweise als Ausdruck der geometrischen Unordnung (geometrische ‚Fluktuation‘ der Umgebungen) erkannt wurden, stellt sich natürlicherweise die Frage, woher überhaupt die Geometrie kommt, welchen Grund wir für die Existenz von ‚Punkten‘, ‚Linien‘ und ‚Quadriken‘ angeben könnten. Primär existieren ‚offensichtlich‘ nur die Punkte  $P$ , während Linien  $L$  und Quadriken  $Q$  ‚nur‘ Beziehungen der Punkte untereinander kennzeichnen, die mathematisch eine bestimmte Geometrie der Punkte definieren und die wir als Raum, Zeit und Materie wahrnehmen. Was aber ‚sind‘ Punkte? Mit dieser ontologischen Frage verlassen wir den Rahmen eines mathematisch-physikalischen Weltmodells und müssen uns ein Bild von der Welt machen, das das Modell als natürlich erscheinen läßt. Ein physikalisches Weltmodell ist ja nur eine Ordnung der Phänomene mit dem begrifflich klaren Instrumentarium der Mathematik, aber keine Interpretation der Grundbegriffe. David Hilbert soll zu der Frage ‚Was sind Punkte‘ gesagt haben:

Man muß jederzeit an Stelle von ‚Punkte, Geraden, Ebenen‘ ‚Tische, Stühle, Bierseidel‘ sagen können.

Er verdeutlichte damit, dass dem Begriff ‚Punkt‘ in der Geometrie keine eigentliche Bedeutung zukommt, sondern es allein auf die in den obigen Axiomen **(i)**- **(vi)** ausgedrückten (Inzidenz-)Relationen ankommt. Die Geometrie ist zwar ursprünglich als Mathematik von Maßbestimmungen in Räumen entstanden, in der modernen Sichtweise ist es aber die Wissenschaft von Inzidenzbeziehungen. Die können auch für andere Elemente als Punkte und Linien zutreffend sein, z. B. für *punktuelle Ereignisse als Elemente einer Welt*, die prozesshaft gedacht wird.

Bisher geht die Physik in ihren Standardtheorien davon aus, dass eine kontinuierliche (topologische) Mannigfaltigkeit von Punkten als struktur- und beginnlose Bühne bereits vorliegt, in der sich dann die Materie und auch die Raum- und Zeitabstände entwickeln.<sup>35</sup> Begrifflich ist dies bei der Annahme einer kontinuierlichen Geometrie auch gar nicht anders möglich, wenn man vermeiden will, über ‚Ränder‘ einer Mannigfaltigkeit zu sprechen, wenn diese in einem Prozess überhaupt erst entstünde. Bei einer Geometrie endlich vieler Punkte ist dies anders, da Punkte stets schon ihrem Begriff nach singulär und vereinzelt sind, so dass endliche Punktmengen überhaupt keine ‚Ränder‘ haben können bzw. nur aus Rändern bestehen, die sich um jeden einzelnen singulären Punkt legen.

Die Annahme, dass die Welt aus endlichen Punkten besteht, macht also die Entstehung dieser Punkte als ein Prozess singulärer Ereignisse plausibel denkbar. Der Mathematiker und Philosoph Alfred North Whitehead schrieb schon 1919 in seiner ersten naturphilosophischen Schrift *Enquiry Concerning the Principles of Natural Knowledge* [2]:

Raum, Zeit und Materie sind Attribute der Ereignisse. Nach der alten Theorie der Relativität sind Raum und Zeit Relationen zwischen Materiepartikeln; nach unserer Theorie sind sie Relationen zwischen Ereignissen.

---

<sup>35</sup>Auch in der Allgemeinen Relativitätstheorie wird eine vier-dimensionale topologische Mannigfaltigkeit vorausgesetzt, die dann durch eine Metrik in allen ihren Punkten strukturiert wird. Mit anderen Worten, die gesamte Welt aller möglichen Punkte existiert bereits vor dem Urknall bzw. gleich nach der Singularität, nach der sich dann die Metrik zwischen allen Punkten entwickelt.

Er meinte damit, dass man nicht ‚Seiendes‘ als Grundlage der Welt machen sollte, sondern einen Prozess von Ereignissen, und ‚Dinge‘ nur als ‚permanente Ereignisse‘ anzusehen sind. Allerdings sind für Whitehead ‚Punkte‘ keine ‚atomaren‘ Ereignisse, sondern abstrakte Klassen von Ereignissen, sozusagen, das Abstraktum, das einer bestimmten Menge von Ereignissen ‚gemeinsam‘ ist. Es ist ein „Trugschluss einfacher Lokalisierung (Verortung)“ („fallacy of simple location“) wenn einer bestimmten Form Materie ein bestimmter Raumzeitpunkt zugewiesen wird. Natur wird nach Whitehead nämlich als ‚kontinuierlich‘ wahrgenommen, aber als ‚atomar‘ wiedererkannt. Nur die Rekonstruktion des Vergangenen geschieht in (unteilbaren) Punkten, während die Ereignisse kontinuierlich geschehen. Ereignisse können daher geometrisch nur mit der Relation des „Ausgedehntseins-über“ gefaßt werden, dem eben nicht die Inzidenz-Relation des „Enthaltenseins-in“ entspricht (siehe Punkt-Geometrie von Euklid und David Hilbert). Whiteheads „Methode der extensiven Abstraktion“<sup>36</sup> bietet eine Möglichkeit über Punkte als Ereignisse zu sprechen.

Ein Begriff von ‚Zeit‘ ist für einen solchen Prozess von Ereignissen zunächst gar nicht nötig, sondern nur eine Folgerelation, d. h. eine Abfolge oder Aufeinanderfolge von Ereignissen. Die obigen Grundannahmen **(i)**-**(vi)** der Geometrie ließen sich dann umformulieren:

- (i)** die Welt besteht aus Ereignissen  $P$ ;
- (ii)** zwei Ereignisse sind durch eine Abfolge  $L$  von Ereignissen verbunden;
- (iii)** zwei Folgen  $L$  von Ereignissen haben in einem gemeinsamen Ereignis  $P$  ihren Ursprung.
- (iv)** jedes Ereignis in einer Abfolge hat genau ein Vorgänger- und ein Nachfolgeereignis.
- (v)** ein Ereignis ist stets das Vorgängerereignis seines Nachfolgeereignisses.
- (vi)** die realisierten Ereignisse sind nur eine Untermenge aller möglichen Ereignisse.

Jede dieser Annahme erscheint als natürliche Bestimmung im Begriff des ‚Ereignisses‘ bereits enthalten zu sein, weshalb sich eine weitere Begründung erübrigt. Das Faszinierende an Mathematik ist, dass sie die logischen Konsequenzen dieser als natürlich angenommenen Relationen zwischen Ereignissen deutlich macht: Ereignisse bilden eine finite projektive Geometrie, deren Aspekte uns als kontinuierliche Raumzeit, als wechselwirkende Materie mit ihren Quantenfluktuationen erscheinen. Was wir als Eigenschaften von Materie, die sich in Raum und Zeit bewegt, wahrnehmen, sind dann aber nur die Spuren vergangener Ereignisse - keine Dinge, sondern Erscheinungsbilder des bereits stattgefundenen Prozesses an Ereignissen, die sich unseren Sinnen als mehr oder weniger permanente, geometrische Strukturen zeigen.

In dem finiten Weltmodell gibt es somit zwei völlig verschiedene Typen/Arten von Zeit: (i) die Koordinaten-Zeit der Minkowski-Raumzeit und (ii) die Prozess-Zeit der Abfolge von Realisierungen einzelner Ereignisse. Dass beide zusammenfallen ist das Ergebnis der Schaffung einer Wahrnehmungsraumzeit durch gebundene Systeme (starre Körper), die zu einer Perpetuierung von Raumzeitereignissen führt, so dass jedes Ereignis einen Basispunkt in der Wahrnehmungsraumzeit induziert. Die umfangreiche philosophische Diskussion zur ‚Zeit‘ kann hier nicht geführt werden. Es soll nur darauf hingewiesen werden, dass die Koordinaten-Zeit eigentlich kein fundamentaler Zeitbegriff ist, da sie ein ‚Blockuniversum‘ impliziert, in dem alles statisch festgelegt ist - ohne jede eigentliche Entwicklung. Dagegen entspricht die Prozess-Zeit unserer unmittelbaren Zeiterfahrung, wird aber bisher in der Physik als ‚nicht-physikalisch‘

---

<sup>36</sup>siehe vor allem Part III, Kapitel 8-13 in den *Enquiry* [2] und Part IV, Kapitel I-III in *Process and Reality* [3]

angesehen. Ihr Weltbild eines Block-Universums ist der klassische Gegenentwurf zu Whiteheads Prozess-Universum.

Wenn die finite Geometrie  $\mathbb{K}_p^d$  den Raum möglicher Ereignisse beschreibt, ergeben sich natürlich weitere Fragen, die mit den Formulierungen **(i)**-**(vi)** einhergehen, aber bisher nicht expliziert wurden:

- ad **(i)** Woher kommt dieser ‚Atomismus‘ von Ereignissen? Ist eine ‚punktfreie‘ Geometrie nicht angemessener zur Beschreibung der Welt? Was ist denn der Grund der Endlichkeit der Ereignisse in einer Abfolge, bzw. was ist der Ursprung einer fundamentalen Skala?
- ad **(ii)** Muß im Raum der Möglichkeiten jedes Ereignis mit jedem anderen verbunden werden können, oder gibt es auch sich ausschließende Ereignisfolgen?
- ad **(iii)** Warum gibt es windschiefe Linien im höherdimensionalen Raum der Möglichkeiten, die sich nicht schneiden?
- ad **(iv)** Kann ein Ereignis nicht mehrere Folgen haben? Wie geschehen ‚Verzweigungen‘ von Abfolgen?
- ad **(v)** Ist Nachbarschaftssymmetrie eine zu einschränkende Forderung an die Abfolge von Ereignissen?
- ad **(vi)** Können Ereignisse aus der Welt wieder verschwinden, der Zustand der Welt kleiner werden?

Was bringt ein solches neues Weltbild? Es sollte Fragen beantworten können, die wir in unserem bisherigen physikalischen Weltbild kaum bzw. gar nicht mehr stellten. Man könnte z. B. über die Ereignis-Begründung der Annahme **(iii)**, bzw. den Ursprung der Kausalität weiter spekulieren: zwei Ereignisketten (Abfolgen  $L$ ) haben stets einen gemeinsamen Ausgangspunkt, das Ereignis aus dem zwei Abfolgen (Linien) von Nachfolgeereignisse folgen. Was sind aber die Punkte auf ‚der anderen Seite‘ dieses Ausgangspunktes? Offensichtlich ist die Natur symmetrischer als unsere Zeitwahrnehmung: Prozesse könnten sich immer in beide Richtungen einer ‚Linie‘ entwickeln. Diese erschienen dann als ‚Antimaterie‘ für die Ordnung störenden Freiheitsgrade und als negativer Abstand im Raum. Aber warum gibt es dann keine ‚negative Zeit‘? Vermutlich, weil eine Dimension das Voranschreiten des Prozesses ausdrücken muß, in dessen Begriff die Gerichtetheit bereits liegt. Was wir als Zeit wahrnehmen, wäre dann die fortschreitende Realisierung von Ereignissen, d. h. das Phänomen, dass überhaupt etwas passiert.

Solche Fragen können heuristische Wegweiser sein, um das oben ausformulierte finite Weltmodell umzubauen oder zu erweitern. Dafür müßten den Begriffen ‚Atomismus‘, ‚Lücken‘ oder ‚Verzweigungen‘ in diesem Weltmodell eine mathematisch präzisere Bedeutung gegeben werden. Was muss aber ein physikalisches Weltmodell auszeichnen, um überzeugend zu sein? Es muss aus wenigen Axiomen ableitbar sein und vor allem alle quantitative messbaren Größen und Strukturen genau so deduzieren können. Wir müssen uns abschließend in Kapitel 8 *Auf dem Weg zum Standardmodell der Physik* also der Frage stellen, wie weit das bisher formulierte Weltmodell empirisch tatsächlich adäquat ist. Vorher erlauben wir uns aber noch zwei spekulative Fragen über die Geschichtlichkeit der Welt und wo der Geist bleibt?

## Vorhersagen in einer offenen Zukunft: Freiheit und Geschichtlichkeit der Welt

Wenn diese Prozessinterpretation der geometrischen Grundbegriffe sinnvoll ist, dann hat dies Konsequenzen für unser Verständnis, was Physik bedeutet: sie ordnet bereits geschehene Ereignisse in ihre geometrische Ordnung, die wir als Naturgesetze formulieren, kann aber keine Ereignisse voraussagen. Die Zukunft ist offen und kann nicht durch Naturgesetzlichkeit festgelegt werden, da diese nur die Vergangenheit betrifft und letztlich nur aus den Annahmen **(i)-(vi)** über die Natur von Ereignissen bestünde. Auch der durch die Annahme **(vi)** eingeführte Zustand (44) beinhaltet nur vergangene Ereignisse und legt zukünftige nicht fest. Dies ist anders als in der klassischen Mechanik oder auch der kanonischen Quantendynamik, bei denen der Zustand eines Systems (Ort und Geschwindigkeit der Teilchen bzw. Anfangswerte der Wellenfunktion) aufgrund der differentiellen Bewegungsgleichungen die zukünftige Entwicklung determiniert. In der finiten Geometrie von Ereignissen bestimmen die vergangenen Ereignisse (der Zustand der Welt) durch die ‚Naturgesetze‘ **(i)-(vi)** (Bewegungsgleichungen) die Realisierung von zukünftigen Ereignissen aber nicht eindeutig. Die Vorhersagekraft der Physik beruht allein darauf, einen Rahmen für mögliche zukünftige Ereignisse setzen zu können, die eben nicht beliebig sind, sondern den Eigenschaften **(i) - (vi)** von ‚Ereignissen‘ (‚Punkten‘) genügen müssen. Insbesondere müssen die möglichen Ereignisse die finite projektive Geometrie erfüllen, so dass  $\mathbb{K}_p^d$  als der Raum der Möglichkeiten betrachtet werden kann. In bestimmten Situationen legen diese bereits viel fest, in anderen so gut wie gar nichts. Was zukünftig passiert, ist aber prinzipiell offen und kann keinen Naturgesetzen unterliegen, da die Naturgesetze **(i) - (vi)** von Ereignisprozessen immer noch einen Raum vieler Möglichkeiten erlauben. Diese Physik wäre insbesondere nicht prädiktiv. Die meisten bisherigen Theorien der Physik setzen voraus, dass Anfangsbedingungen die Zukunft eindeutig bestimmen (z. B. globale Hyperbolizität in der ART). In diesem finiten Weltmodell läge die Vorhersagefähigkeit der Physik aber nur an der technischen Möglichkeit, durch Ereignisse Randbedingungen für weitere Ereignisse zu stellen. Determiniert wäre aber nur die Vergangenheit.

Die Interpretation von ‚Punkten‘ als Ereignisse und ‚Linien‘ als Prozessabfolgen, ermöglicht damit eine neue Weltsicht, die bisherige Annahmen in Frage stellt. Gibt es wirklich einen Raum, der sich in die Zukunft erstreckt und dort bereits vorliegt, um von unseren Handlungen mit Ereignissen gefüllt zu werden? Oder ist nicht alles, was wir sehen, Vergangenes, das unsere Sinne nur für uns festhalten? Es gibt nichts in der Zukunft, auch keinen Raum und keine Zeit, denn sie sind auch nur permanent erscheinende Ereignisse der Vergangenheit. Die Zukunft ist dagegen völlig offen.

Die Frage, was die Realisierung von Ereignissen im Prozess bestimmt, scheint über die Möglichkeiten der Physik hinauszudeuten, da sie keine Frage der Strukturierung der bereits geschehenen Phänomene betrifft. Physik beschäftigt sich nur mit dem Beobachtbaren, d. h. der Vergangenheit, nicht mit den zukünftigen Ereignissen. Es ist wichtig zu betonen, dass die grundlegenden Naturgesetze **(i)-(vi)** eben ‚nur‘ Eigenschaften von vergangenen Ereignissen sind, die sich in Regelmäßigkeiten von Phänomenen ausdrücken. Durch ihre geometrische Struktur beeinflussen sie zwar zukünftige Ereignisse aus dem Raum  $\mathbb{K}_p^d$  der Möglichkeiten, da diese sich in Vergangenes einfügen müssen, sie determinieren sie aber nicht. Wie wird dann aber die Realisierung eines konkreten Ereignisses aus der Unendlichkeit der Möglichkeiten ausgewählt? Es könnte purer Zufall sein, oder ein völlig unbekanntes, nicht-physikalisches Prinzip, oder eventuell die Intention eines Bewußtseins. Empirisch scheint dann aber das größte ungelöste Problem zu sein, wie genau das Bewußtsein und der freie Wille des Menschen im Rahmen eines finiten Weltmodells wirkt, wie Intentionen in die Welt kommen. Bei solchen Fragen scheint die Physik momentan in der Tat an ihr Ende gekommen zu sein.

## Jenseits von Raum und Zeit: Geist und Seele

Zum Schluß bleibt eine Frage, die sich schon zu Beginn der Geschichte die Vorsokratiker stellten: in welchem Verhältnis steht der Geist zur Welt, sei es die kognitive Psyche - von Plato ‚nous‘ genannt - oder die intentionale und bewegende Lebenskraft - von Anaximenes Pneuma - genannt? Was ist Intention von Punkten? Was ist raumloser Geist? Gibt es eine Seele? Und letztlich, wo ist Gott in einer finiten Welt? Erlaubt ein finites Weltmodell, zu solchen Fragen etwas beizutragen, was nicht früher schon formuliert war?

Man könnte darüber spekulieren, ob in dieser Welt der Ereignisse es nicht auch Ereignisse gibt, die sich nicht in Raum und Zeit zeigen: Prozesse der Gefühle und des Bewußtseins, der Intention und des Willens. Qualia wären raumzeitlose Ereignisse, die aber ‚verbunden‘ sind mit neuronalen Gehirnaktivitäten als den (korrelierten) Ereignissen in Raum und Zeit. Die Welt finiter projektiver Geometrien würde solche Geistereignisse zulassen, z. B. als Ereignisse im ‚Unendlichen‘, die außerhalb von Raum und Zeit liegen aber als Ereignisse von Linien oder Hyperebenen dennoch mit ihnen verbunden wären. Denkmöglich sind solche Fragen im Rahmen eines finiten Weltmodells geworden, aber was sind die definierenden Eigenschaften solcher Geist-Ereignisse und wie genau nehmen sie Einfluß auf die Welt der Raumzeit-Ereignisse? Nun kann man über mögliche Antworten trefflich spekulieren und debattieren. Entscheidend ist, ob das vorliegende Weltmodell mit den empirisch feststellbaren Fakten konsistent ist.

## 8 Auf dem Weg zum Standardmodell der Physik

Nur im Unendlichkleinen dürfen wir erwarten auf die elementaren überall gleichen Gesetze zu stoßen, darum muß die Welt aus ihrem Verhalten im Unendlichkleinen verstanden werden.

Hermann Weyl, *Philosophie der Mathematik und Naturwissenschaft*, 1927.

Im Gegensatz zur Allgemeinen Relativitätstheorie und der Quantenfeldtheorie der elementaren Teilchen ist das hier vorgestellte Weltmodell bisher nicht in seinen physikalischen Vorhersagen ausgearbeitet oder gar empirisch getestet. Es ist bisher nur ein theoretischer Ansatz, der vielversprechende Aspekte aufweist, eine einheitliche Theorie der physikalischen Phänomene der Welt zu erklären. Ob das Weltmodell einer projektiven Geometrie endlich vieler Ereignispunkte tatsächlich mit allen empirischen Daten verträglich ist, wird gerade studiert. Ziel ist dabei, sowohl das Standardmodell der Elementarteilchenphysik als auch die Allgemeine Relativitätstheorie der Kosmologie aus der grundlegenden finiten Geometrie als effektive Theorien für große Skalen abzuleiten. Wenn dies mathematisch gelingt, kann die bereits vorliegende, hervorragende empirische Bestätigung dieser Theorien zur Begründung des tiefer liegenden geometrischen Weltmodells verwendet werden. Auf dem Weg dahin sind die folgenden konkrete Schritte zu tun:

- S1:** Die fundamentalen **physikalischen Objekte** des kontinuierlichen Standardmodells der Physik, d. h. die Metrik  $g_{\mu\nu}(X)$  und der Krümmungstensor  $G_{\mu\nu} = \mathcal{G}[g_{\mu\nu}]$  der Raumzeit (siehe Einstein-Tensor (9)) müssen wie die komplexe Wellenfunktionen  $\psi(X)$  der Quantenfeldtheorie in Gl. (24) als Parameter für die möglichen Quadriken  $Q(X)$  bzw. sie erzeugende Projektivitäten  $\Psi(X)$  identifizierbar sein. Es dürfen vor allem nicht mehr Teilchenfelder auftreten, da es vermutlich schwer sein würde, ihre bisherige empirische Nichtbeobachtung zu begründen.

**S2:** Die fundamentalen **Symmetriegruppen** des kontinuierlichen Standardmodells der Physik, d. h. die Poincarégruppe der Minkowski-Raumzeit  $\mathbb{R}^{1+3}$  sowie die Eichgruppe  $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$  der Wechselwirkungen elementarer Teilchen (siehe Gl. (15)) müssen als kontinuierlicher Grenzfall in der projektiven Symmetriegruppe (28) der Quadriken und der finiten Eichgruppe (34) enthalten sein. Es dürfen vor allem nicht mehr oder weniger Eichfelder  $\phi_\mu^a$  bzw. lokale Symmetrien auftreten, da ihre bisherige empirische Nichtbeobachtung schwierig zu begründen wäre. Zudem müssen die kontinuierlichen Materiefelder  $\psi$  sich als Darstellungsräume der kontinuierlichen Symmetriegruppen erweisen und somit automatisch die Dirac-Gleichung bzw. die freien Yang-Mills-Gleichungen (13) mit den entsprechenden Feldstärke-Tensoren  $F_{\mu\nu}^a = \mathcal{F}[\phi_\mu^a]$  erfüllen.

**S3:** Die fundamentalen **Wechselwirkungen** des kontinuierlichen Standardmodells der Physik, d. h. die Einstein-Gleichungen (8) für die Gravitation und der Energie-Impuls-Tensor (11) des Standardmodells der Elementarteilchen müssen aus der Annahme (**v**) auf natürliche Weise folgen. Insbesondere muß - wie bereits oben bei der Einführung der Wechselwirkung (**v**) erwähnt - die finite Version des Funktionals  $T_{\mu\nu} = \mathcal{T}[\Psi]$  für den Energie-Impuls-Tensor (11) des Standardmodells hergeleitet werden.

Das meiste ist offensichtlich noch zu tun und es ist vermessen anzunehmen, dass diese Herleitungen mühelos gelingen werden. Immerhin bietet das finite Weltmodell einen denkbaren Ansatz, der ein Gelingen der Deduktion der Allgemeinen Relativitätstheorie und des Standardmodells plausibel macht. Doch damit nicht genug.

### Werte beobachteter physikalischer Größen

Abgesehen davon, dass die Grundstruktur einer 3+1-dimensionalen Welt mit Quantenmaterie ohne Singularitäten auf natürliche Weise durch eine finite Geometrie von Ereignissen begründet werden kann, stellt sich offensichtlich die Frage, ob auch etwas Beobachtbares neu erklärbar bzw. dieser theoretische Ansatz durch empirische Experimente testbar ist. Dafür spielen vor allem die Vermessungen der elementaren Teilchen an Beschleunigern wie dem CERN und der großräumigen Struktur des Universums wie durch das Weltraumteleskop Hubble eine entscheidende Rolle (siehe Abb. 17), da nur bei den kleinsten oder größten Längenskalen sich die entscheidenden Eigenschaften der Materie zeigen. Die Hoffnung ist, mit diesem finiten Weltmodell auch Fragen zu diesen kosmologischen Beobachtungen bzw. gemessenen physikalischen Werten elementarer Teilchen beantworten zu können, die momentan im kontinuierlichen Standardmodells der Physik zwar thematisiert, aber nicht beantwortet werden können:

**W1:** Woher kommen die gemessenen **Werte der 24 unbestimmten Parameter** im Standardmodell, insbesondere die Hierarchie der verschiedenen Massen? So stellte z. B. Richard Feynman bzgl. der Feinstrukturkonstante  $\alpha \approx 1/137$ , die die Stärke der elektromagnetischen Wechselwirkung angibt, fest:

Sie war stets ein Mysterium, seit sie vor über fünfzig Jahren entdeckt wurde, und alle guten theoretischen Physiker hängen sich diese Zahl an die Wand und zerbrechen sich über sie den Kopf.

Sowohl diese Feinstrukturkonstante wie auch die Stärken  $\alpha_S$  und  $\alpha_W$  der starken und schwachen Wechselwirkungen (3 Parameter), sowie die Masse des Elektrons wie auch der aller anderen Teilchen (insgesamt 13 Parameter für 6 Quarks, 6 Leptonen und einem Higgs-Teilchen) müssen in einem finiten Geometriemodell als natürliche Zahlen

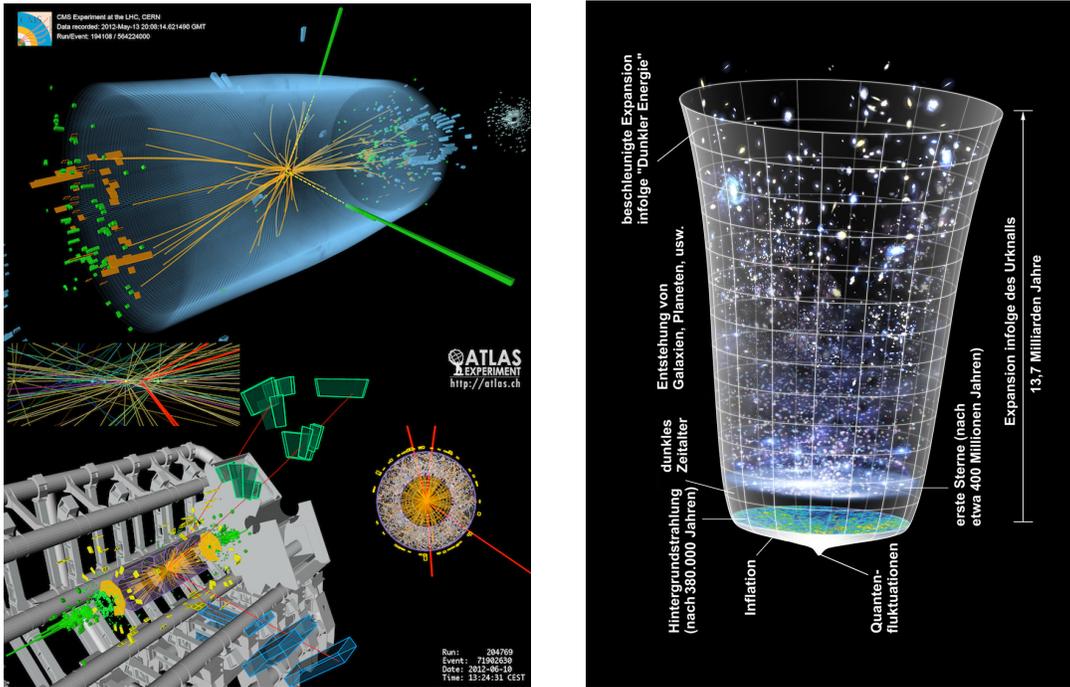


Abbildung 17: Experimente wie diese Entdeckung des Higgs-Teilchens am CERN durch zwei unabhängige Detektoren (CMS oben, ATLAS unten) sowie astronomische Beobachtungen des Universums legen die Werte **W1** - **W8** des Standardmodells fest. Jedes mathematische Modell muß kompatibel mit diesen Werten sein, um den Anspruch erheben zu können, eine einheitliche Theorie der physikalischen Phänomene der Welt sein zu können. (Quelle: cds.cern.ch/record/1630222)

auftreten können. Hinzu kommen noch die 8 Parameter der Mischungswinkel zwischen den Familien (siehe nächste Frage). Während die Stärken  $\alpha_i$  der drei Wechselwirkungen die drei unbestimmten Normierungsfaktoren  $c_k$  in einer Biquadrik sein könnten, könnte die Masse  $m_H$  des Higgs-Teilchens der 4. Normierungsfaktor  $h_4$  auf der Diagonale einer Biquadrik sein (siehe Gl. (25)). Auch für jeden der vier Teilchentypen mit den Indizes  $\mu$ ,  $q$ ,  $i$  und  $e$  ließe sich eine charakteristische Wellenlänge als fundamentale Masse einführen, die wegen einer Periodizitätsbedingung an die Wellenfunktion nur bestimmte Werte annehmen dürften. Die weiteren Komponenten der Felder  $\Psi$  sind allerdings Darstellungskomponenten der Symmetriegruppe und sollten daher keine weiteren verschiedenen Massen haben. Nimmt man dafür 3 Familien von Teilchen an, erhielte man genau die 12 Massenparameter für Quarks und Leptonen. Die tatsächlich gemessenen Werte der Massen wären aber als effektive Massen auf großen Längenskalen (niederen Energien) durch die Wechselwirkung der Felder untereinander zu erklären (Renormierung). Im Gegensatz zum Standardmodell müssen aber keine unbestimmten Konstanten der Wechselwirkungstärken mit dem Higgsfeld angegeben werden, da die Teilchenfelder (12) nicht ‚per Hand‘ in die Welt eingefügt werden, sondern als geometrische Freiheitsgrade in der Quadrik vorhanden sind. Allerdings müssen die gemessenen Werte der Wechselwirkungstärken mit dem Higgsfeld quantitativ korrekt aus einer Renormierungstheorie der Geometriefluktuationen herauskommen, was ein starker Test des finiten Weltmodells wäre.

- W2:** Warum gibt es **drei Familien** von elementaren Teilchen? Insbesondere woher kommen die Werte der 4 Parameter der Kobayashi-Maskawa Matrix und die 4 Parameter der Pontecorvo-Maki-Nakagawa-Sakata Matrix, die jeweils die Zerfallskanäle zwischen den Quark-Familien und den Leptonen-Familien beschreiben. Man könnte argumentieren, dass die baren (nicht-renormierten) Massen nur mögliche Teiler der Anzahl  $n$  von Ereignissen in einer Abfolge sein können, um periodische Eigenfunktionen zu ermöglichen, d. h. um die geometrische Periodizität der Welt zu berücksichtigen.<sup>37</sup> Aus der probabilistischen Zahlentheorie weiß man, dass eine Zahl der Größenordnung  $n \approx 10^{60}$  typischerweise nur 3 Teiler hat.
- W3:** Woher kommt der **Vakuumerwartungswert des Higgsfeldes**, das die  $SU(2) \times U(1)$ -Symmetrie bricht und den schwachen Eichbosonen eine bestimmte effektive Masse verleiht. Die Symmetriebrechung müßte als Vielteilcheneffekt aus der Wechselwirkungstheorie folgen und den Vakuumerwartungswert bestimmen.
- W4:** Wo sind die **rechtshändigen Neutrinos**? Wurden sie nicht gemessen, weil sie nicht als Freiheitsgrade existieren (Majorana-Masse) oder weil sie nur über das Higgs-Teilchen mit den anderen Teilchen wechselwirken und wir noch nicht lange genug nach ihnen gesucht haben? Im Rahmen des finiten Weltmodells könnte man argumentieren, dass es prinzipiell nur linkshändige Darstellungen  $\nu_l(P)$  der Isospinsymmetrie gibt, während das rechtshändige Elektron (Myon, Tau) die 1-komponentige Darstellung  $e(P)$  der Ladungssymmetrie sei.
- W5:** Was ist die ‚**Dunkle Materie**‘? Ist dies ein Effekt der möglicherweise durch nicht-periodische Störungen der Biquadrik entsteht und daher gar nicht als Teilchen mit einer bestimmten Masse auftreten kann? Oder sind es die Teilchen, die in der Transformationsmatrix (24) zwar Spinorkomponenten  $\psi_i(P)$  haben, aber keine Ladungen tragen ( $q_j = 0$ ,  $\nu_l = 0$  und  $e = 0$ ) und daher nur gravitativ wechselwirken?
- W6:** Was ist die ‚**Dunkle Energie**‘? Ist die beobachtete Beschleunigung der Expansion des Universums möglicherweise ein Effekt der zusätzlichen Dimensionen im Lichtkegel einer finiten Geometrie, der quasi als zusätzlicher Raum in jedem Raumzeitpunkt der Welt als ‚Hintergrunddynamik‘ wirkt? Anders gefragt: woher kommt die *Kosmologische Konstante*, deren Ursprung im Standardmodell völlig unklar ist? Läßt sich ihr Wert durch eine zeitabhängig wachsende Anzahl versteckter Dimensionen bestimmen?
- W7:** Woher kommt die **Asymmetrie von Materie und Antimaterie** im beobachtbaren Universum? Woher kommt die Brechung der Zeitsymmetrie (bzw. der C- und CP-Symmetrie)? Per Hand ließe sich eine Asymmetrie im finiten Weltmodell einfach durch eine Abwandlung der Nachbarschaftssymmetrie ( $\mathbf{v}$ ) einführen. Aber ob das eine sinnvolle Antwort auf die fehlende Antimaterie im Universum ist, kann nur eine konkrete und aufwendige Rechnung im Modell geben.
- W8:** Woher kommen die **Größen der gebundenen Teilchensysteme**, insbesondere der Wert des Protonenradius von 1 Femtometer ( $1fm = 10^{-15}$  Meter) und des Bohrschen Atomradius von 1 Ångström ( $1\text{Å} = 10^{-10}$  Meter)? Diese charakteristischen Längen setzen die Skala für den klassischen Limes und teilen die Welt in eine subatomare Quantenwelt und eine makroskopische Anschauungswelt. Erst die Stabilität gebundener Systeme

---

<sup>37</sup>Fermats ‚Little Theorem‘ besagt, dass  $x^{p-1} \equiv 1 \pmod p$ , so dass die Periode einer Funktion über einem endlichen Primkörper  $\mathbb{K}_p$  die fundamentale Primzahl  $p - 1$  teilen muß.

erlaubt die Existenz einer klassischen Raumzeit als persistentes Ereignis, da sie gebunden nur in einer (!) linearen Hülle mit stabiler Nachbarschaft/Umgebung möglich sind.

Es ist noch viel zu tun, alle diese Werte zu berechnen. Auch wenn dies konkret noch nicht geschehen ist, erlaubt das finite Weltmodell doch zumindest Ideen, woher diese Werte kommen könnten und eröffnet damit ein produktives Forschungsfeld für die nächsten Jahrzehnte. Es würde an ein Wunder grenzen, wenn alle diese Zahlenwerte wie gemessen aus dem finiten Geometriemodell berechenbar wären. Selbst wenn sich dieser Ansatz als empirisch nicht adäquat erweisen sollte, ist er aber nicht wertlos. Es ist ein wohldefiniertes Modell, von dem es sich lohnt, seine Eigenschaften zu studieren und Konsequenzen zu kennen. Es eröffnet vor allem auch Denkmöglichkeiten, die vielleicht in eine andere Richtung weisen werden, die dann hoffentlich erfolgreicher wären, die Phänomene zu erklären.

### **Ein Ende der Grundlagensuche der Physik?**

Wenn dieses Modell und die Interpretation der finiten projektiven Geometrie als ein Prozess von Ereignissen stimmt, wäre dies wohl das Ende der Grundlagensuche der Physik. Die Physik hebt sich quasi auf, da es keine Naturgesetzlichkeit mehr zu entdecken gibt, wenn die beobachtete Welt nur die zurückbleibende Spur des Geschehenden ist, die sich notwendigerweise als finite projektive Geometrie strukturiert.

Natürlich wurde das Ende der Physik schon öfters ausgerufen; am Ende des 19. Jahrhunderts mit der Klassischen Mechanik als einer alle natürlichen Phänomene erklärenden Theorie und neuerdings mit der Superstringtheorie und anderen Varianten einer Weltformel oder 'Theory of Everything'. Wer weiß schon, welche Überraschungen Natur für uns bereithält in immer kleineren oder größeren Skalen? Es gibt allerdings einen guten Grund, ein Ende der Grundlagensuche der Physik zu erwarten: die fundamentalen Naturgesetze, aus denen die Allgemeine Relativitätstheorie und das Standardmodell ableitbar sind, könnten so ‚einfach‘ sein, dass überhaupt kein Bedarf nach einer weiteren Suche da wäre. Wenn die benötigten Grundbegriffe und Grundrelationen gar keine Mathematik mehr benötigen und so evident einleuchtend sind, dass sich jede weitere Frage erübrigt. Physik hebt sich dann auf, weil sie nichts mehr zu erklären hat, weil die fundamentalen Naturgesetze sich nicht in abstrakter Mathematik finden lassen, sondern sich auflösen in den Eigenschaften eines Prozesses von Ereignissen.

### **Danksagung**

Dankbar bin ich Herbert Wagner, der während meiner Doktorarbeit mir nicht nur Physik beibrachte, sondern mich auch lehrte, immer nach den Grundlagen und den tieferen Gründen für ein Argument zu suchen. Es ist mir eine große Freude, Aura Heydenreich für die jahrelange Zusammenarbeit über den Konzepttransfer und die Bedeutung der Semiotik in der Physik zu danken. Sie bestand immer darauf, nach der semantischen Flexibilität sogar in der mathematischen Physik zu suchen, was mich anregte, über alternative Interpretationen sogar der klassischen Mechanik nachzudenken und zu fragen, woher ihr Determinismus kommt. Dank gebührt auch allen meinen Mitarbeitern am Lehrstuhl für Theoretische Physik in Erlangen für die vielen helfenden Hände bei der täglichen Arbeit. Insbesondere Gerd Schröder-Turk, Margret Heinen-Krumreich, Alexander Laska, Felix Winterhalter und Ingrid Hofmann haben mich bei der Lehre und Betreuung von Studierenden, aber auch bei der Verwaltung und Aufrechterhaltung der notwendigen Infrastruktur eines Lehrstuhls großartig unterstützt und mir Freiräume geschaffen, über die hier vorgestellten Ideen nachzudenken.

# Literatur

- [1] Hermann Klaus Hugo Weyl, *Raum, Zeit, Materie - Vorlesungen über Allgemeine Relativitätstheorie*, Springer, Berlin 1918; Eichtheorie erst ab der 4. Auflage im Buch.
- [2] Alfred North Whitehead, *An Enquiry Concerning the Principles of Natural Knowledge*, Cambridge University Press, Cambridge 1919.
- [3] Alfred North Whitehead, *Process and Reality: An Essay in Cosmology*, Cambridge University Press, Cambridge (1929); dt.: *Prozeß und Realität*, Suhrkamp, Frankf. 1984.
- [4] Felix Klein, *Das Erlanger Programm*, Vorlesung Erlangen, 1872; in Ostwalds Klassiker der exakten Wissenschaften, Akad. Verlagsgesellschaft Geest und Portig, Leipzig (1974).
- [5] Bernhard Riemann, *Ueber die Hypothesen, welche der Geometrie zu Grunde liegen*, Abhandlungen der Königl. Gesell. der Wissenschaften zu Göttingen **13**, 133-150 (1868).
- [6] Albert Einstein, *Die Feldgleichungen der Gravitation*, Sitzungsberichte der Preussischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin, 844-847 (November 25, 1915).
- [7] Albert Einstein, *Die Grundlage der allgemeinen Relativitätstheorie*, Annalen der Physik **49**, 769-822 (1916).
- [8] Hermann Weyl, *Gravitation und Elektrizität*, Sitzungsberichte der Preussischen Akademie der Wissenschaften, Januar-Juni 1918, S. 465
- [9] Hermann Weyl, *Elektron und Gravitation*, Zeitschrift für Physik **56**, 330-352 (1929).
- [10] Karl Georg Christian von Staudt, *Geometrie der Lage*, Verlag der Fr. Korn'schen Buchhandlung, Nürnberg 1847.
- [11] Oswald Veblen and W. H. Bussey, *Finite Projective Geometries*, Transactions of the American Mathematical Society **7**, 241-259 (1906).
- [12] Klaus Mecke, *Finite Projective Geometry as a Quantum World with Elementary Particles*, Talk at the International Conference on *Geometry and Physics of Spatial Random Systems*, Bad Herrenalb, Germany, September 6 - 11, 2015.
- [13] Klaus Mecke, *Biquadratics configure Finite Projective Geometry into a Quantum Space-time*, EPL (Europhysics Letters) **120**(1), 10007 (2017).
- [14] Paul Ehrenfest, *Welche Rolle spielt die Dimensionalität des Raumes in den Grundgesetzen der Physik?*, Annalen der Physik **61**, 440-446 (1920).
- [15] Albert Einstein, *Zur einheitlichen Feldtheorie*, Sitzungsberichte d. Preuß. Akad. d. Wiss., Phys.-math. Kl. 1929/1, Gruyter, Berlin 1929.
- [16] Werner Heisenberg, *Introduction to the Unified Field Theory of Elementary Particles*, John Wiley & Sons 1966.
- [17] Gustav Järnefelt, *Reflections on a finite approximation to Euclidean geometry. Physical and astronomical prospects*, Annales Ac. Sc. Fennicae A I. Math-Phys. **96**, 1-43 (1951).
- [18] Paul Kustaanheimo, *On the fundamental prime of a finite world*, Annales Ac. Sc. Fennicae A I. Math-Phys. **129**, 1-7 (1952).