Levy-Flight im Zwei-Teilchen System

Bachelorarbeit aus der Physik

Vorgelegt von

Jamin Krieger

07.03.2024

Institut für Theoretische Physik 1

Friedrich-Alexander-Universität Erlangen-Nürnberg

Betreuer: Herr Professor Doktor Michael Schmiedeberg

Inhaltsverzeichnis

Abbildungsverzeichnis

Random-Walks, Levy-Flights und Levy-Walks

Tragweite und Eigenschaften von Random-Walks

Random Walks sind nicht nur bei mikroskopischen Phänomenen, wie beispielsweise der Brownschen Bewegung oder Zellmigration von hoher Bedeutung, sondern auch in unserem makroskopischem Alltag erkennbar und von großer Tragweite. So kann man sie bei der Bewegung von Tieren in der Wildnis, Fluglinien oder auch Aktienmärkten beobachten. Ein wichtiges Theorem für Random Walks wie beispielsweise der Brownschen Bewegung ist der zentrale Grenzwertsatz. An dieser Stelle und in der Definition von Levy-Flight und Levy-Walk halte ich mich eng an die Formulierungen aus dem Buch "Elements of Random Walk and Diffusion Processes" von Oliver C. Ibe ([1];[2]). Seien X_i unabhängige und identisch verteilte Zufallsvariablen mit endlichem Erwartungswert μ_x und Varianz σ_X^2. Dann besagt der zentrale Grenzwertsatz, dass die Zufallsvariable

$$Y_n = \frac{X_1 + X_2 + ... + X_n - n\mu_x}{\sigma_X \sqrt{n}}$$

für $n \to \infty$ gegen die Standartnormalverteilung konvergiert. Die Standartnormalverteilung ist eine Gauß-Funktion mit Erwartungswert $E(X) = 0$ und Varianz $\sigma_X^2 = 1$. Eine Bedingung für die Gültigkeit des zentralen Grenzwertsatzes ist, dass der Erwartungswert, auch oft als $E(X)$ gekennzeichnet, und die Varianz σ_X^2 endlich sind. Im nächsten Abschnitt zeige ich, dass der Grenzwertsatz für Levy-Flights und Levy Walks verletzt sein kann, wodurch sie sich von anderen Random Walks unterscheiden können. Es sei an dieser Stelle noch angemerkt, dass für eine Zufallsvariable mit kontinuierlichen Werten, eine Wahrscheinlichkeits-Dichte-Funktion $f_X(x)$ eingeführt wird, mit

$$E[X] = \mu_x = \int_{-\infty}^{+\infty} dx\ x\ f_X(x)$$

$$\sigma_X^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} dx\ \left(x - E[X]\right)^2 f_X(x)$$

Definition von Levy-Flight und Levy-Walk

Im Folgenden sind der Levy-Flight sowie der Levy-Walk von großer Bedeutung. Um Letzteren genauer zu verstehen, muss zunächst der Begriff des Levy-Flights geklärt werden. "Ein Levy-Flight ist eine mathematische Beschreibung einer Ansammlung von zufälligen, kurzen Schritten welche durch seltene, längere Schritte verbunden sind [3]." Bei einem Levy-Flight werden, wie der Begriff Flight schon impliziert, die Gitterpunkte "überflogen". Es werden nur Anfangs- und Endpunkt berührt. Außerdem bewegt man sich im Levy-Flight mit unendlicher Geschwindigkeit von Gitterpunkt zu Gitterpunkt. Des Weiteren kann die Wahrscheinlichkeits-Dichte Funktion $f_X(x)$ im Falle des Levy-Flights eine Potenzfunktion sein [4]:

$$f_X(x) \propto (1+x)^{-\alpha}\ ,\ 0 < \alpha$$

Man verschiebt oft die Funktion um einen endlichen Wert, da infinitesimal kleine Werte in der Basis der Potenzfunktion nicht von Bedeutung sind. Für den Erwartungswert folgt mit $C = const.$

$$E[X] = \int_0^{+\infty} dx\ x\ C(1+x)^{-\alpha} \stackrel{p.I.}{=}$$

$$\stackrel{p.I.}{=} C\ \Big(\lim_{x\to\infty}\ x\cdot\frac{(1+x)^{1-\alpha}}{1-\alpha} - \frac{(1+x)^{2-\alpha}}{(1-\alpha)(2-\alpha)} + \frac{1}{(1-\alpha)(2-\alpha)}\Big)$$

Betrachtet man noch die Fälle $\alpha = 1$ und $\alpha = 2$, so ergibt sich für $\alpha = 1$:

$$E[X] = \int_0^{+\infty} dx\ x\ C(1+x)^{-1} = C\ \Big(x - ln(x+1)\Big)\ \Big|_0^{\infty} \to \infty$$

Und für $\alpha = 2$:

$$E[X] = \int_0^{+\infty} dx\ x\ C(1+x)^{-2} = C\ \Big(ln(x+1) + \frac{1}{x+1}\Big)\ \Big|_0^{\infty} \to \infty$$

Ich integriere ab der Null, da ich in den folgenden Kapiteln Variablen wie den Betrag des Ortsvektors $|\ \vec{r}\ |$ und die Zeit t betrachte, welche größer oder gleich Null sind. Betrachtet man den Erwartungswert für das Intervall $\alpha \in (0, 2]$, so muss der Grenzwert $\lim_{\alpha\to 0}$ berechnet werden. Ich nehme dabei an, dass $\lim_{\alpha\to 0}$ und $\lim_{x\to\infty}$ vertauscht werden dürfen:

$$\lim_{x\to\infty}\ \lim_{\alpha\to 0}\ x\cdot\frac{(1+x)^{1-\alpha}}{1-\alpha} - \frac{(1+x)^{2-\alpha}}{(1-\alpha)(2-\alpha)} + \frac{1}{(1-\alpha)(2-\alpha)} =$$

$$= \lim_{x\to\infty}\ x\cdot\frac{(1+x)^1}{1} - \frac{(1+x)^2}{1\cdot 2} + \frac{1}{1\cdot 2} = \lim_{x\to\infty}\ \frac{x^2}{2} \to \infty$$

Da nun für alle $0 < \alpha \leq 2$ und $x > 0$ gilt: $(1+x)^{-2} < (1+x)^{-\alpha} < \lim_{\alpha\to 0}\ (1+x)^{-\alpha}$ und die Spezialfälle $\alpha = 1, 2$ wohldefiniert sind, divergiert der Erwartungswert zwischen $0 < \alpha \leq 2$. Für Werte $\alpha > 2$ divergiert das Integral

$$E[X] = C\ \Big(\lim_{x\to\infty}\ x\cdot\frac{(1+x)^{1-\alpha}}{1-\alpha} - \frac{(1+x)^{2-\alpha}}{(1-\alpha)(2-\alpha)} + \frac{1}{(1-\alpha)(2-\alpha)}\Big)$$

nicht mehr. Dies kann auf drei Dimensionen verallgemeinert werden. Sei $f(x, y, z)$ eine Wahrscheinlichkeits-Dichte-Funktion für die neue Zufallsvariable $g(x, y, z)$, so gilt nach [5]:

$$E_g(X, Y, Z) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} dx\,dy\,dz\ g(x, y, z)\ f(x, y, z)$$

Wählen wir $f(x,y,z) = (1+\sqrt{x^2+y^2+z^2})^{-\alpha}$, sowie es später noch häufig vorkommt und betrachten für $g(x,y,z)$ den Radius $r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$, dann ergibt sich:

$$E(r) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} dx\, dy\, dz\, \frac{r}{(1+r)^{\alpha}} = 4\pi \int_{0}^{+\infty} dr\, \frac{r^3}{(1+r)^{\alpha}}$$

Man kann zeigen, dass sich für jede zusätzliche Dimension die rechte Grenze des Intervalls von α, für das der Erwartungswert divergiert, um Eins vergrößert. Aus diesem Grund, ist der zentrale Grenzwertsatz in drei Dimensionen mindestens für Werte $\alpha \in (0,4]$ verletzt, da in diesem Intervall der Erwartungswert divergiert. Für eine genaue Darstellung der Exponenten zu den unterschiedlichen Arten von Diffusion verweise ich auf das Paper [6]. Die Betrachtung der Divergenz ist wesentlich komplizierter. Ich gehe nicht auf sie ein. Der Levy-Walk unterscheidet sich nun darin, dass das Teilchen eine kontinuierliche Trajektorie von Anfangs- zu Endpunkt verfolgt. Die Zeit dafür ist endlich und somit auch die Geschwindigkeit des Teilchens. Die Gitterpunkte, welche beim Levy-Flight erreicht werden, sind im Levy-Walk-Modell Wendepunkte. Levy-Walks können allerdings ebenfalls den zentralen Grenzwertsatz verletzen.

Ein-Teilchen System

Bei der Beschreibung des Ein-Teilchen Systems halte ich mich eng an das Paper [6] "On moments and scaling regimes in anomalous random walks" von Michael Schmiedeberg, Holger Stark und Vasily Yu Zaburdaev. Dort wird die Wahrscheinlichkeits-Dichte $Q(\vec{r},t)$ eingeführt, welche den Fall beschreibt, dass ein Schritt im Intervall $[\vec{r}, \vec{r}+d\vec{r}]$ und $[t, t+dt]$ endet. Sie beschreibt die Wendepunkte des Teilchens, welche in Abbildung 1 durch die farbigen Punkte gekennzeichnet sind. $Q(\vec{r},t)$ wird durch folgende Ratengleichung beschrieben:

$$\begin{aligned} Q(\vec{r},t) &= \int\limits_{\vec{r}\,'} \int\limits_{t'} d\vec{r}\,' dt' g(\vec{r}\,') f(t') Q(\vec{r}-\vec{r}\,', t-t') + Q(0,0) = \\ &= \int\limits_{\vec{r}\,'} \int\limits_{t'} d\vec{r}\,' dt' g(\vec{r}\,') f(t') Q(\vec{r}-\vec{r}\,', t-t') + \delta(\vec{r})\delta(t) \end{aligned} \tag{1}$$

Es wird über den gesamten 3-Dimensionalen Ort und über Zeiten $t' \in [0,\infty)$ integriert. Dabei ist die Initialbedingung, dass das Teilchen im Ort $(0,0)$ startet. Dies wird durch das Produkt der beiden Delta-Distributionen realisiert. $g(\vec{r})$ ist die Wahrscheinlichkeit für einen Schritt, der in $[\vec{r}, \vec{r}+d\vec{r}]$ endet und wird oft durch eine Potenzfunktion beschrieben. Selbiges gilt für $f(t)$, wodurch die Wahrscheinlichkeit für einen Schritt der in $[t, t+dt]$ endet, angegeben wird. Beispiele für solche Potenzfunktionen sind:

$$g(\vec{r}) \propto \frac{1}{(1+|\vec{r}|)^{\beta+1}}, \quad \beta > 0$$

$$f(t) = \frac{\mu}{(1+t)^{\mu+1}} \quad , \quad \mu > 0$$

In der Ratengleichung wird also die Wahrscheinlichkeits-Dichte Q am Raum-Zeitpunkt $(\vec{r}, t)$ durch alle realisierbaren, vorangegangenen Wahrscheinlichkeits-Dichten $Q(\vec{r} - \vec{r}', t - t')$ beschrieben. $Q(\vec{r} - \vec{r}', t - t')$ ist die Wahrscheinlichkeits-Dichte, dass der vorherige Schritt in $\vec{r} - \vec{r}'$ und $t - t'$ endete. Befinde ich mich also um den Raumvektor $\vec{r}'$ und um die Zeit t' verschoben von $(\vec{r}, t)$, so ergibt sich $Q(\vec{r}, t)$ indem ich $g(\vec{r}')$ und $f(t')$ berücksichtige. Man summiert über alle möglichen Verschiebungen $(\vec{r}', t')$ in Form eines Integrals und erhält $Q(\vec{r}, t)$. In ihrem Paper stellen die Autoren drei Varianten von Random Walks vor:

- Wait-first model: Zunächst wartet das Teilchen ein Zeitintervall t und springt dann instantan entlang des Vektors $\vec{r}$ zur neuen Position
- Jump-first model: Das Teilchen springt instantan entlang des Vektors $\vec{r}$ zur nächsten Position und wartet dann dort eine Zeit t
- Velocity model: Das Teilchen bewegt sich mit einer konstanten Geschwindigkeit v zur nächsten Position (Levy-Walk, Abb. 1)

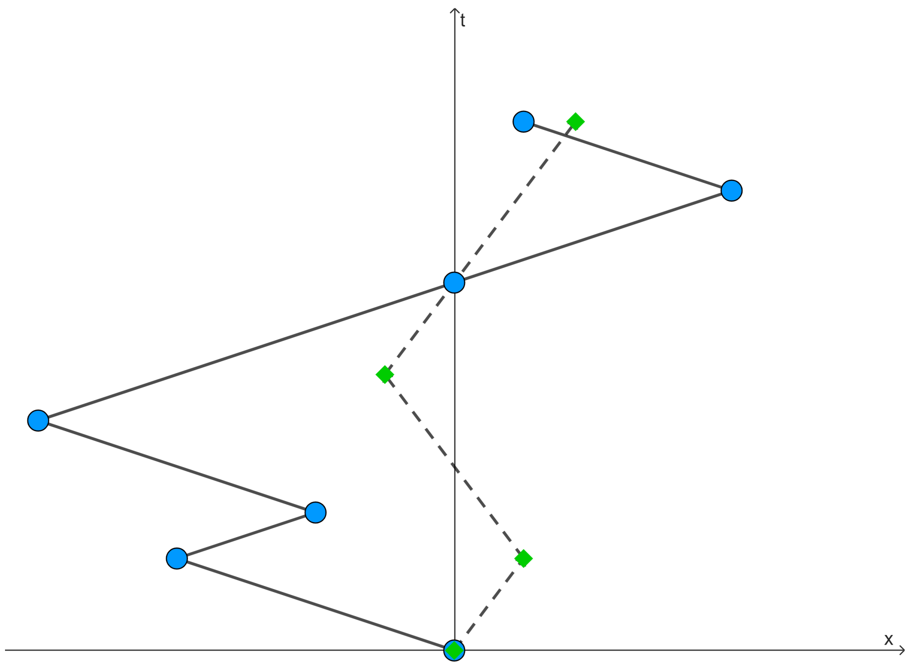

Abb.1 Levy-Walk zweier unabhängiger Teilchen in einer Dimension [7]

Zur Berechnung der Wahrscheinlichkeit P nutzt man eine Eigenschaft der Fourier- und Laplacetransformationen aus. Diese seien wie folgt definiert. Dabei soll der Index i angeben, auf welche Raumvektoren und Zeiten die jeweilige Transformation wirken soll. Dies ist in Mehr-Teilchen Systemen nötig.

$$\mathcal{F}_i\big(f(\vec{r}_i)\big)(\vec{k}_i) = \int\limits_{x\in\mathbb{R}} \int\limits_{y\in\mathbb{R}} \int\limits_{z\in\mathbb{R}} d\vec{r}_i\ f(\vec{r}_i)\cdot e^{-i\,\vec{k}_i\,\vec{r}_i} := \int\limits_{\vec{r}_i} d\vec{r}_i\ f(\vec{r}_i)\cdot e^{-i\,\vec{k}_i\,\vec{r}_i}$$

$$\mathcal{L}_i\big(f(t_i)\big)(s_i) = \int\limits_0^\infty dt_i\ f(t_i)\cdot e^{-s_i\,t_i}$$

Die Laplace-Transformation ist eng verwandt mit der Fourier-Transformation und wird im Folgenden auf zeitabhängige Funktionen angewendet. $\mathcal{F}$ und $\mathcal{L}$ werden von mir als vertauschbar angenommen. Die Ratengleichung (1) enthält Faltungen in $\vec{r}$ und t, welche folgende nützliche Eigenschaft haben:

$$\mathcal{F}\big(f(\vec{r}) * g(\vec{r})\big)(k) = \mathcal{F}(f)(k)\cdot\mathcal{F}(g)(k)$$

$$\mathcal{L}\big(f(t) * g(t)\big)(s) = \mathcal{L}(f)(s)\cdot\mathcal{L}(g)(s)$$

Mit Ausnutzung dieser Eigenschaft folgt für die Ratengleichung (1) des Ein-Teilchen Systems:

$$\mathcal{FL}\ Q(\vec{r},t) =$$

$$= \mathcal{FL}\ \Big(\int\limits_{\vec{r}\,'}\int\limits_{t'} d\vec{r}\,'dt'g(\vec{r}\,')f(t')Q(\vec{r}-\vec{r}\,',t-t') + \delta(\vec{r})\delta(t)\Big) =$$

$$= \mathcal{FL}\int\limits_{\vec{r}\,'}\int\limits_{t'} d\vec{r}\,'dt'g(\vec{r}\,')f(t')Q(\vec{r}-\vec{r}\,',t-t') + \mathcal{FL}\ \delta(\vec{r})\delta(t) =$$

$$= \int\limits_{\vec{r}} d\vec{r}\ e^{-i\,\vec{k}\,\vec{r}}\int\limits_0^\infty dt\ e^{-s\,t}\int\limits_{\vec{r}\,'}\int\limits_{t'} d\vec{r}\,'dt'g(\vec{r}\,')f(t')Q(\vec{r}-\vec{r}\,',t-t') +$$

$$+ \int\limits_{\vec{r}} d\vec{r}\ e^{-i\,\vec{k}\,\vec{r}}\int\limits_0^\infty dt\ e^{-s\,t}\ \delta(\vec{r})\delta(t) =$$

$$= \int\limits_{\vec{r}} d\vec{r}\ e^{-i\,\vec{k}\,\vec{r}}\int\limits_0^\infty dt\ e^{-s\,t}\int\limits_{\vec{r}\,'} d\vec{r}\,'g(\vec{r}\,')\Big(f(t) * Q(\vec{r}-\vec{r}\,',t)\Big) +$$

$$+ e^{-i\,\vec{k}\cdot 0}\; e^{-s\cdot 0} \;\; =$$

$$= \int\limits_{\vec{r}} d\vec{r}\, e^{-i\,\vec{k}\,\vec{r}} \int\limits_{\vec{r}\,'} d\vec{r}\,'\, g(\vec{r}\,')\; \int\limits_{0}^{\infty} dt\; e^{-s\,t}\Big(f(t) * Q(\vec{r}-\vec{r}\,', t)\Big)+$$

$$+\,1 =$$

$$= \int\limits_{\vec{r}} d\vec{r}\, e^{-i\,\vec{k}\,\vec{r}} \int\limits_{\vec{r}\,'} d\vec{r}\,'\, g(\vec{r}\,')\; \mathcal{L}\Big(f(t) * Q(\vec{r}-\vec{r}\,', t)\Big)+$$

$$+\,1 =$$

$$= \int\limits_{\vec{r}} d\vec{r}\, e^{-i\,\vec{k}\,\vec{r}} \int\limits_{\vec{r}\,'} d\vec{r}\,'\, g(\vec{r}\,')\; \mathcal{L}f(t)\cdot \mathcal{L}Q(\vec{r}-\vec{r}\,', t) + 1 =$$

$$= \int\limits_{\vec{r}} d\vec{r}\, e^{-i\,\vec{k}\,\vec{r}}\, \mathcal{L}f(t)\; \Big(g(\vec{r}) * \mathcal{L}Q(\vec{r}, t)\Big) + 1 =$$

$$= \mathcal{L}f(t)\; \mathcal{F}\, \Big(g(\vec{r}) * \mathcal{L}Q(\vec{r}, t)\Big) + 1 =$$

$$= \mathcal{L}f(t)\; \mathcal{F}g(\vec{r})\; \mathcal{F}\mathcal{L}Q(\vec{r}, t) + 1 \quad \Rightarrow$$

$$\mathcal{F}\mathcal{L}\; Q(\vec{r}, t) - \mathcal{F}g(\vec{r})\; \mathcal{L}f(t)\; \mathcal{F}\mathcal{L}Q(\vec{r}, t) =$$

$$= \mathcal{F}\mathcal{L}\; Q(\vec{r}, t)\Big(1 - \mathcal{F}g(\vec{r})\; \mathcal{L}f(t)\Big) = 1 \quad \Rightarrow$$

$$\mathcal{F}\mathcal{L}\; Q(\vec{r}, t) = \frac{1}{1 - \mathcal{F}g(\vec{r})\; \mathcal{L}f(t)} \tag{2}$$

Im nächsten Schritt kann man die Wahrscheinlichkeit $P(\vec{r}, t)$ berechnen. Diese gibt an, ein Teilchen zur Zeit t zwischen $\vec{r} + d\vec{r}$ zu finden. Im Velocity model wird $P(\vec{r}, t)$ in Abbildung 1 durch die Linien zwischen den farbigen Punkten dargestellt. Im Wait-first model, ergibt sich $P(\vec{r}, t)$ durch:

$$P(\vec{r}, t) = \int\limits_{0}^{t} dt' Q(\vec{r}, t - t')F(t')$$

wobei $F(t)$ die Wahrscheinlichkeit ist, dass das Teilchen in einem gewissen Zeitintervall t nicht springt: $F(t) = 1 - \int\limits_0^t dt' f(t')$. Die Wahrscheinlichkeit im Falle des Wait-first Models im Fourier-Laplace Raum $\bar{P}_s(\vec{k}, s) = \mathcal{LF}\ P_s(\vec{r}, t)$ berechnet sich wie folgt:

$$\mathcal{FL}\ P_s(\vec{r}, t) = \mathcal{FL} \int\limits_0^t dt' Q(\vec{r}, t - t')\, F_s(t') =$$

$$= \mathcal{FL}\left(Q(\vec{r}, t) * F_s(t)\right) = \mathcal{FL}\ Q(\vec{r}, t) \cdot \mathcal{L}\ F_s(t) \stackrel{(2)}{=} \frac{\mathcal{L}\ F_s(t)}{1 - \mathcal{F}g(\vec{r})\ \mathcal{L}f(t)} \tag{3}$$

Will man nun die Wahrscheinlichkeit im realen Raum kennen, so wendet man die inverse Fourier-Laplace Transformation an. Dies ist selten analytisch lösbar und benötigt oft Näherungsverfahren.

Zwei identische Teilchen ohne Kopplung

Von Interesse bei der Betrachtung zweier identischer, unabhängiger Teilchen ist unter Anderem, wie sich die Wahrscheinlichkeits-Dichte zusammensetzt. So wird gezeigt, dass sie mit den Wahrscheinlichkeits-Dichten der beiden Ein-Teilchen Systeme in Verbindung steht. Außerdem ist man an der Wahrscheinlichkeit interessiert. Es muss zuerst die korrekte Ratengleichung für das Zwei-Teilchen System aufgestellt werden.

Ratengleichung

Die Ratengleichung für zwei echt unabhängige Teilchen lautet:

$$Q(\vec{r}_1, t_1, \vec{r}_2, t_2) =$$

$$= \int\limits_{\vec{r}_1{}'} \int\limits_{t_1'} \int\limits_{\vec{r}_2{}'} \int\limits_{t_2'} d\vec{r}_1{}' d\vec{r}_2{}' dt_1' dt_2'\, F(\vec{r}_1{}', t_1', \vec{r}_2{}', t_2') \cdot$$

$$\cdot\, Q(\vec{r}_1 - \vec{r}_1{}', t_1 - t_1', \vec{r}_2 - \vec{r}_2{}', t_2 - t_2') +$$

$$+\, Q(\vec{r}_1, t_1, \vec{r}_2, t_2 \mid \vec{r}_1 = 0, t_1 = 0) +$$

$$+\, Q(\vec{r}_1, t_1, \vec{r}_2, t_2 \mid \vec{r}_2 = 0, t_2 = 0) +$$

$$+\, Q(\vec{r}_1, t_1, \vec{r}_2, t_2 \mid \vec{r}_1 = 0, t_1 = 0, \vec{r}_2 = 0, t_2 = 0)$$

Es gibt drei Initialbedingungen. Jeweils eines der Teilchen startete im Ursprung

$$Q(\vec{r}_1, t_1, \vec{r}_2, t_2 \mid \vec{r}_1 = 0, t_1 = 0)$$
$$Q(\vec{r}_1, t_1, \vec{r}_2, t_2 \mid \vec{r}_2 = 0, t_2 = 0)$$

Oder beide Teilchen starteten im Ursprung

$$Q(\vec{r}_1, t_1, \vec{r}_2, t_2 \mid \vec{r}_1 = 0, t_1 = 0, \vec{r}_2 = 0, t_2 = 0)$$

Das $|$ bedeutet in diesem Kontext "mit der Bedingung". Bei $F(\vec{r}_1{}', t_1', \vec{r}_2{}', t_2')$ handelt es sich um eine Korrelationsfunktion. Im Falle des Ein-Teilchen-Systems schrieb sich diese für das jeweilige Teilchen als

$$F(\vec{r}_i{}', t_i') = g(\vec{r}_i{}')\ f(t_i') \qquad\qquad i \in 1, 2$$

Q hängt im Zwei-Teilchen System von den Variablen $\vec{r}_1, t_1, \vec{r}_2, t_2$ der Teilchen 1 und 2 ab. Wir betrachten unabhängige Teilchen ohne Korrelation, es soll also gelten
$F(\vec{r}_1{}', t_1', \vec{r}_2{}', t_2') = F(\vec{r}_1{}', t_1') \cdot F(\vec{r}_2{}', t_2')$. Die Initialbedingungen lassen sich wie folgt schreiben:

$$\begin{aligned}
&Q(\vec{r}_1, t_1, \vec{r}_2, t_2) = \\
&\quad = \int\limits_{\vec{r}_1{}'} \int\limits_{t_1'} \int\limits_{\vec{r}_2{}'} \int\limits_{t_2'} d\vec{r}_1{}' d\vec{r}_2{}' dt_1' dt_2'\, F(\vec{r}_1{}', t_1', \vec{r}_2{}', t_2') \cdot \\
&\qquad \cdot\ Q(\vec{r}_1 - \vec{r}_1{}', t_1 - t_1', \vec{r}_2 - \vec{r}_2{}', t_2 - t_2') + \\
&\qquad + \delta(\vec{r}_1)\delta(t_1) \cdot \int\limits_{\vec{r}_1{}'} \int\limits_{t_1'} \int\limits_{\vec{r}_2{}'} \int\limits_{t_2'} d\vec{r}_1{}' d\vec{r}_2{}' dt_1' dt_2'\, F(\vec{r}_1{}', t_1', \vec{r}_2{}', t_2') \cdot \\
&\qquad \cdot\ Q(\vec{r}_2 - \vec{r}_2{}', t_2 - t_2') + \\
&\qquad + \delta(\vec{r}_2)\delta(t_2) \cdot \int\limits_{\vec{r}_1{}'} \int\limits_{t_1'} \int\limits_{\vec{r}_2{}'} \int\limits_{t_2'} d\vec{r}_1{}' d\vec{r}_2{}' dt_1' dt_2'\, F(\vec{r}_1{}', t_1', \vec{r}_2{}', t_2') \cdot \\
&\qquad \cdot\ Q(\vec{r}_1 - \vec{r}_1{}', t_1 - t_1') + \\
&\qquad + \delta(\vec{r}_1)\delta(t_1) \cdot \delta(\vec{r}_2)\delta(t_2) \cdot \int\limits_{\vec{r}_1{}'} \int\limits_{t_1'} \int\limits_{\vec{r}_2{}'} \int\limits_{t_2'} d\vec{r}_1{}' d\vec{r}_2{}' dt_1' dt_2'\, F(\vec{r}_1{}', t_1', \vec{r}_2{}', t_2')
\end{aligned} \tag{4}$$

Ich betrachte kurz die Logik hinter dem Ausdruck. Im ersten Summand bezieht man sich ganz allgemein auf den Schritt zuvor. Jetzt beginnen die Initialbedingungen. Im zweiten Summanden war Teilchen 1 am Anfang in $(0,0)$ was durch die Delta-Distributionen $\delta(\vec{r}_1)\delta(t_1)$ dargestellt wird, während Teilchen 2 an einer beliebigen Stelle war. Der zweite Summand entspricht $Q(\vec{r}_1, t_1, \vec{r}_2, t_2 \mid \vec{r}_1 = 0, t_1 = 0)$. Im dritten Summanden war Teilchen 2 am Anfang in (0,0) und Teilchen 1 war an einer beliebigen Stelle. Im vierten Summanden sind beide Teilchen in (0,0) gestartet. Mit diesen Initialbedingungen sind die beiden Teilchen echt unabhängig voneinander. Diese Ratengleichung kann man umformen. Sei hierbei $F(\vec{r}_i{}', t_i')$ normiert, d.h. $\int\limits_{\vec{r}_i{}'}\int\limits_{t_i'} d\vec{r}_i{}'dt_i' F(\vec{r}_i{}', t_i') = 1$. Ich nehme an, dass ein Raum-Zeit Punkt $(\vec{r}_{1,0}, t_{1,0}, \vec{r}_{2,0}, t_{2,0})$ existiert, an dem gilt:

$$Q(\vec{r}_1, t_1, \vec{r}_2, t_2) = Q(\vec{r}_1, t_1)\, Q(\vec{r}_2, t_2)$$

Da sich die Ratengleichung auf den letzten Schritt bezieht, kann man mit einer ähnlichen Vorgehensweise wie bei der vollständigen Induktion argumentieren, um die allgemeine Separierbarkeit zu beweisen. Im letzten Schritt war

$$Q(\vec{r}_1 - \vec{r}_1{}', t_1 - t_1', \vec{r}_2 - \vec{r}_2{}', t_2 - t_2') =$$

$$= Q(\vec{r}_1 - \vec{r}_1{}', t_1 - t_1')\, Q(\vec{r}_2 - \vec{r}_2{}', t_2 - t_2')$$

Dann folgt für den darauffolgenden Schritt mit Hilfe der Ratengleichung

$$Q(\vec{r}_1, t_1, \vec{r}_2, t_2) =$$

$$= \int\limits_{\vec{r}_1{}'}\int\limits_{t_1'}\int\limits_{\vec{r}_2{}'}\int\limits_{t_2'} d\vec{r}_1{}'d\vec{r}_2{}'dt_1'dt_2'\, F(\vec{r}_1{}', t_1')\, F(\vec{r}_2{}', t_2') \cdot$$

$$\cdot\ Q(\vec{r}_1 - \vec{r}_1{}', t_1 - t_1')\, Q(\vec{r}_2 - \vec{r}_2{}', t_2 - t_2') +$$

$$+ \delta(\vec{r}_1)\delta(t_1) \cdot \int\limits_{\vec{r}_1{}'}\int\limits_{t_1'}\int\limits_{\vec{r}_2{}'}\int\limits_{t_2'} d\vec{r}_1{}'d\vec{r}_2{}'dt_1'dt_2'\, F(\vec{r}_1{}', t_1')F(\vec{r}_2{}', t_2') \cdot$$

$$\cdot\ Q(\vec{r}_2 - \vec{r}_2{}', t_2 - t_2') +$$

$$+ \delta(\vec{r}_2)\delta(t_2) \cdot \int\limits_{\vec{r}_1{}'}\int\limits_{t_1'}\int\limits_{\vec{r}_2{}'}\int\limits_{t_2'} d\vec{r}_1{}'d\vec{r}_2{}'dt_1'dt_2'\, F(\vec{r}_1{}', t_1')F(\vec{r}_2{}', t_2') \cdot$$

$$\cdot\ Q(\vec{r}_1 - \vec{r}_1{}', t_1 - t_1') +$$

$$+\,\delta(\vec{r}_1)\delta(t_1)\delta(\vec{r}_2)\delta(t_2)\cdot\int\limits_{\vec{r}_1{}'}\int\limits_{t_1'}\int\limits_{\vec{r}_2{}'}\int\limits_{t_2'} d\vec{r}_1{}'d\vec{r}_2{}'dt_1'dt_2'\,F(\vec{r}_1{}',t_1')\;F(\vec{r}_2{}',t_2')\;=$$

$$=\int\limits_{\vec{r}_1{}'}\int\limits_{t_1'} d\vec{r}_1{}'dt_1'\,F(\vec{r}_1{}',t_1')\;Q(\vec{r}_1-\vec{r}_1{}',t_1-t_1')\,\cdot$$

$$\cdot\int\limits_{\vec{r}_2{}'}\int\limits_{t_2'} d\vec{r}_2{}'dt_2'\;F(\vec{r}_2{}',t_2')\;Q(\vec{r}_2-\vec{r}_2{}',t_2-t_2')\,+$$

$$+\,\delta(\vec{r}_1)\delta(t_1)\cdot\int\limits_{\vec{r}_1{}'}\int\limits_{t_1'} d\vec{r}_1{}'dt_1'\,F(\vec{r}_1{}',t_1')\cdot\int\limits_{\vec{r}_2{}'}\int\limits_{t_2'} d\vec{r}_2{}'dt_2'\,F(\vec{r}_2{}',t_2')\,\cdot$$

$$\cdot\;Q(\vec{r}_2-\vec{r}_2{}',t_2-t_2')\,+$$

$$+\,\delta(\vec{r}_2)\delta(t_2)\cdot\int\limits_{\vec{r}_2{}'}\int\limits_{t_2'} d\vec{r}_2{}'dt_2'\,F(\vec{r}_2{}',t_2')\cdot\int\limits_{\vec{r}_1{}'}\int\limits_{t_1'} d\vec{r}_1{}'dt_1'\,F(\vec{r}_1{}',t_1')\,\cdot$$

$$\cdot\;Q(\vec{r}_1-\vec{r}_1{}',t_1-t_1')\,+$$

$$+\,\delta(\vec{r}_1)\delta(t_1)\delta(\vec{r}_2)\delta(t_2)=$$

$$=\int\limits_{\vec{r}_1{}'}\int\limits_{t_1'} d\vec{r}_1{}'dt_1'\,F(\vec{r}_1{}',t_1')\;Q(\vec{r}_1-\vec{r}_1{}',t_1-t_1')\,\cdot$$

$$\cdot\int\limits_{\vec{r}_2{}'}\int\limits_{t_2'} d\vec{r}_2{}'dt_2'\;F(\vec{r}_2{}',t_2')\;Q(\vec{r}_2-\vec{r}_2{}',t_2-t_2')\,+$$

$$+\,\delta(\vec{r}_1)\delta(t_1)\cdot\int\limits_{\vec{r}_2{}'}\int\limits_{t_2'} d\vec{r}_2{}'dt_2'\,F(\vec{r}_2{}',t_2')\cdot Q(\vec{r}_2-\vec{r}_2{}',t_2-t_2')\,+$$

$$+\,\delta(\vec{r}_2)\delta(t_2)\cdot\int\limits_{\vec{r}_1{}'}\int\limits_{t_1'} d\vec{r}_1{}'dt_1'\,F(\vec{r}_1{}',t_1')\cdot Q(\vec{r}_1-\vec{r}_1{}',t_1-t_1')\,+$$

$$+\,\delta(\vec{r}_1)\delta(t_1)\delta(\vec{r}_2)\delta(t_2)=$$

$$= \int_{\vec{r}_1{}'} \int_{t_1'} d\vec{r}_1{}' dt_1' \, F(\vec{r}_1{}', t_1') \; Q(\vec{r}_1 - \vec{r}_1{}', t_1 - t_1') + \delta(\vec{r}_1)\delta(t_1) \cdot$$

$$\cdot \int_{\vec{r}_2{}'} \int_{t_2'} d\vec{r}_2{}' dt_2' \; F(\vec{r}_2{}', t_2') \; Q(\vec{r}_2 - \vec{r}_2{}', t_2 - t_2') + \delta(\vec{r}_2)\delta(t_2) = Q(\vec{r}_1, t_1) \cdot Q(\vec{r}_2, t_2) \tag{5}$$

Die Separierbarkeit gilt in diesem Fall also für alle Zeiten und alle Orte. Es sei angemerkt, dass die jeweiligen Delta-Distributionen nicht unter den Integralen stehen.

Wahrscheinlichkeit im Fourier-Laplace Raum

Es folgt der Beweis der Behauptung, dass die Wahrscheinlichkeit $\bar{P}_s(\vec{k}_1, s_1, \vec{k}_2, s_2)$ des Zwei-Teilchen-Systems im Fourier-Laplace-Raum dem Produkt der Ein-Teilchen Wahrscheinlichkeiten $\bar{P}_s(\vec{k}_i, s_i)$ entspricht. Es soll die Separierbarkeit der Ratengleichung von $Q(\vec{r}_1, t_1, \vec{r}_2, t_2)$ gelten (5).

$$\bar{P}_s(\vec{k}_1, s_1, \vec{k}_2, s_2) =$$

$$= \mathcal{F}_1 \mathcal{L}_1 \mathcal{F}_2 \mathcal{L}_2 \Big(P_s(\vec{r}_1, t_1, \vec{r}_2, t_2) \Big) =$$

$$= \mathcal{F}_1 \mathcal{L}_1 \mathcal{F}_2 \mathcal{L}_2 \Big(\int_0^{t_1} \int_0^{t_2} dt_1' dt_2' Q(\vec{r}_1, t_1 - t_1', \vec{r}_2, t_2 - t_2') F_s(t_1') F_s(t_2') \Big) =$$

$$= \mathcal{F}_1 \mathcal{L}_1 \mathcal{F}_2 \mathcal{L}_2 \Big(Q(\vec{r}_1, t_1, \vec{r}_2, t_2) \Big) \cdot \mathcal{L}_1 F_s(t_1) \mathcal{L}_2 F_s(t_2) \stackrel{(5)}{=}$$

$$\stackrel{(5)}{=} \mathcal{F}_1 \mathcal{L}_1 \mathcal{F}_2 \mathcal{L}_2 \Big(Q(\vec{r}_1, t_1) \cdot Q(\vec{r}_2, t_2) \Big) \cdot \mathcal{L}_1 F_s(t_1) \mathcal{L}_2 F_s(t_2) =$$

$$= \mathcal{F}_1 \mathcal{L}_1 Q(\vec{r}_1, t_1) \cdot \mathcal{F}_2 \mathcal{L}_2 Q(\vec{r}_2, t_2) \cdot \mathcal{L}_1 F_s(t_1) \mathcal{L}_2 F_s(t_2) =$$

$$= \mathcal{F}_1 \mathcal{L}_1 Q(\vec{r}_1, t_1) \mathcal{L}_1 F_s(t_1) \cdot \mathcal{F}_2 \mathcal{L}_2 Q(\vec{r}_2, t_2) \mathcal{L}_2 F_s(t_2) \stackrel{(2)}{=}$$

$$\stackrel{(2)}{=} \frac{\mathcal{L}_1 \; F_s(t_1)}{1 - \mathcal{F}_1 g(\vec{r}_1) \; \mathcal{L}_1 f(t_1)} \cdot \frac{\mathcal{L}_2 \; F_s(t_2)}{1 - \mathcal{F}_2 g(\vec{r}_2) \; \mathcal{L}_2 f(t_2)} \stackrel{(3)}{=}$$

$$\stackrel{(3)}{=} \bar{P}_s(\vec{k}_1, s_1) \cdot \bar{P}_s(\vec{k}_2, s_2) \tag{6}$$

Zwei identische Teilchen mit Kopplung

Allgemeine Betrachtung

Es geht im Folgenden um die Betrachtung von Zwei-Teilchen Systemen mit einer nicht-separablen Korrelationsfunktion $F(\vec{r}_1{}', t_1', \vec{r}_2{}', t_2') \neq F(\vec{r}_1{}', t_1') \cdot F(\vec{r}_2{}', t_2')$. Die Korrelationsfunktion ist normiert. Außerdem führe ich zwei Hilfsfunktionen $F_A(\vec{r}_1{}', t_1')$ und $F_B(\vec{r}_2{}', t_2')$ ein.

$$\int\limits_{\vec{r}_1{}'}\int\limits_{t_1'}\int\limits_{\vec{r}_2{}'}\int\limits_{t_2'} d\vec{r}_1{}' d\vec{r}_2{}' dt_1' dt_2' \, F(\vec{r}_1{}', t_1', \vec{r}_2{}', t_2') = 1$$

$$F_A(\vec{r}_1{}', t_1') := \int\limits_{\vec{r}_2{}'}\int\limits_{t_2'} d\vec{r}_2{}' dt_2' \, F(\vec{r}_1{}', t_1', \vec{r}_2{}', t_2')$$

$$F_B(\vec{r}_2{}', t_2') := \int\limits_{\vec{r}_1{}'}\int\limits_{t_1'} d\vec{r}_1{}' dt_1' \, F(\vec{r}_1{}', t_1', \vec{r}_2{}', t_2')$$

Analog zu Gleichung (4) werden die Initialbedingungen aufgestellt.

$$Q(\vec{r}_1, t_1, \vec{r}_2, t_2) =$$

$$= \int\limits_{\vec{r}_1{}'}\int\limits_{t_1'}\int\limits_{\vec{r}_2{}'}\int\limits_{t_2'} d\vec{r}_1{}' d\vec{r}_2{}' dt_1' dt_2' \, F(\vec{r}_1{}', t_1', \vec{r}_2{}', t_2') \cdot$$

$$\cdot \; Q(\vec{r}_1 - \vec{r}_1{}', t_1 - t_1', \vec{r}_2 - \vec{r}_2{}', t_2 - t_2') +$$

$$+ \, \delta(\vec{r}_1)\delta(t_1) \cdot$$

$$\cdot \int\limits_{\vec{r}_1{}'}\int\limits_{t_1'}\int\limits_{\vec{r}_2{}'}\int\limits_{t_2'} d\vec{r}_1{}' d\vec{r}_2{}' dt_1' dt_2' \, F(\vec{r}_1{}', t_1', \vec{r}_2{}', t_2') \; Q(\vec{r}_2 - \vec{r}_2{}', t_2 - t_2') +$$

$$+ \, \delta(\vec{r}_2)\delta(t_2) \cdot$$

$$\cdot \int\limits_{\vec{r}_1{}'}\int\limits_{t_1'}\int\limits_{\vec{r}_2{}'}\int\limits_{t_2'} d\vec{r}_1{}' d\vec{r}_2{}' dt_1' dt_2' \, F(\vec{r}_1{}', t_1', \vec{r}_2{}', t_2') \; Q(\vec{r}_1 - \vec{r}_1{}', t_1 - t_1') +$$

$$+ \, \delta(\vec{r}_1)\delta(t_1)\delta(\vec{r}_2)\delta(t_2) \cdot$$

$$\cdot \int\limits_{\vec{r}_1\,'}\int\limits_{t_1'}\int\limits_{\vec{r}_2\,'}\int\limits_{t_2'} d\vec{r}_1\,'d\vec{r}_2\,'dt_1'dt_2'\,F(\vec{r}_1\,',t_1',\vec{r}_2\,',t_2') =$$

$$= \int\limits_{\vec{r}_1\,'}\int\limits_{t_1'}\int\limits_{\vec{r}_2\,'}\int\limits_{t_2'} d\vec{r}_1\,'d\vec{r}_2\,'dt_1'dt_2'\,F(\vec{r}_1\,',t_1',\vec{r}_2\,',t_2') \cdot$$

$$\cdot\ Q(\vec{r}_1-\vec{r}_1\,',t_1-t_1',\vec{r}_2-\vec{r}_2\,',t_2-t_2') +$$

$$+\,\delta(\vec{r}_1)\delta(t_1)\,\cdot$$

$$\cdot \int\limits_{\vec{r}_2\,'}\int\limits_{t_2'} d\vec{r}_2\,'dt_2'\ Q(\vec{r}_2-\vec{r}_2\,',t_2-t_2')\int\limits_{\vec{r}_1\,'}\int\limits_{t_1'} d\vec{r}_1\,'dt_1'\,F(\vec{r}_1\,',t_1',\vec{r}_2\,',t_2') +$$

$$+\,\delta(\vec{r}_2)\delta(t_2)\,\cdot$$

$$\cdot \int\limits_{\vec{r}_1\,'}\int\limits_{t_1'} d\vec{r}_1\,'dt_1'\ Q(\vec{r}_1-\vec{r}_1\,',t_1-t_1')\int\limits_{\vec{r}_2\,'}\int\limits_{t_2'} d\vec{r}_2\,'dt_2'\,F(\vec{r}_1\,',t_1',\vec{r}_2\,',t_2') +$$

$$+\,\delta(\vec{r}_1)\delta(t_1)\delta(\vec{r}_2)\delta(t_2) =$$

$$= \int\limits_{\vec{r}_1\,'}\int\limits_{t_1'}\int\limits_{\vec{r}_2\,'}\int\limits_{t_2'} d\vec{r}_1\,'d\vec{r}_2\,'dt_1'dt_2'\,F(\vec{r}_1\,',t_1',\vec{r}_2\,',t_2') \cdot$$

$$\cdot\ Q(\vec{r}_1-\vec{r}_1\,',t_1-t_1',\vec{r}_2-\vec{r}_2\,',t_2-t_2') +$$

$$+\,\delta(\vec{r}_1)\delta(t_1)\cdot\int\limits_{\vec{r}_2\,'}\int\limits_{t_2'} d\vec{r}_2\,'dt_2'\ Q(\vec{r}_2-\vec{r}_2\,',t_2-t_2')F_B(\vec{r}_2\,',t_2') +$$

$$+\,\delta(\vec{r}_2)\delta(t_2)\cdot\int\limits_{\vec{r}_1\,'}\int\limits_{t_1'} d\vec{r}_1\,'dt_1'\ Q(\vec{r}_1-\vec{r}_1\,',t_1-t_1')F_A(\vec{r}_1\,',t_1') +$$

$$+\,\delta(\vec{r}_1)\delta(t_1)\delta(\vec{r}_2)\delta(t_2) \tag{7}$$

Die Allgemeine Ratengleichung solcher Systeme im Fourier-Laplace Raum lautet

$$
\begin{aligned}
&\mathcal{L}_2\mathcal{F}_2\mathcal{L}_1\mathcal{F}_1\, Q(\vec{r}_1, t_1, \vec{r}_2, t_2) = \\
&\quad = \mathcal{L}_2\mathcal{F}_2\mathcal{L}_1\mathcal{F}_1 \int\limits_{\vec{r}_1\,'}\int\limits_{t_1'}\int\limits_{\vec{r}_2\,'}\int\limits_{t_2'} d\vec{r}_1\,'d\vec{r}_2\,'dt_1'dt_2'\, F(\vec{r}_1\,', t_1', \vec{r}_2\,', t_2') \cdot \\
&\qquad \cdot\; Q(\vec{r}_1 - \vec{r}_1\,', t_1 - t_1', \vec{r}_2 - \vec{r}_2\,', t_2 - t_2') + \\
&\quad\; + \mathcal{L}_2\mathcal{F}_2\mathcal{L}_1\mathcal{F}_1 \Big(\delta(\vec{r}_1)\delta(t_1) \cdot \\
&\qquad \cdot \int\limits_{\vec{r}_2\,'}\int\limits_{t_2'} d\vec{r}_2\,'dt_2'\; Q(\vec{r}_2 - \vec{r}_2\,', t_2 - t_2')F_B(\vec{r}_2\,', t_2')\Big) + \\
&\quad\; + \mathcal{L}_2\mathcal{F}_2\mathcal{L}_1\mathcal{F}_1 \Big(\delta(\vec{r}_2)\delta(t_2) \cdot \\
&\qquad \cdot \int\limits_{\vec{r}_1\,'}\int\limits_{t_1'} d\vec{r}_1\,'dt_1'\; Q(\vec{r}_1 - \vec{r}_1\,', t_1 - t_1')F_A(\vec{r}_1\,', t_1')\Big) + \\
&\quad\; + \mathcal{L}_2\mathcal{F}_2\mathcal{L}_1\mathcal{F}_1 \Big(\delta(\vec{r}_1)\delta(t_1)\delta(\vec{r}_2)\delta(t_2)\Big) = \\
&\quad = \mathcal{L}_2\mathcal{F}_2\mathcal{L}_1\mathcal{F}_1\, F(\vec{r}_1, t_1, \vec{r}_2, t_2) \cdot \mathcal{L}_2\mathcal{F}_2\mathcal{L}_1\mathcal{F}_1\; Q(\vec{r}_1, t_1, \vec{r}_2, t_2) + \\
&\quad\; + \mathcal{L}_2\mathcal{F}_2\, F_B(\vec{r}_2, t_2) \cdot \mathcal{L}_2\mathcal{F}_2\; Q(\vec{r}_2, t_2) + \\
&\quad\; + \mathcal{L}_1\mathcal{F}_1\, F_A(\vec{r}_1, t_1) \cdot \mathcal{L}_1\mathcal{F}_1\; Q(\vec{r}_1, t_1) + \\
&\quad\; + 1
\end{aligned} \tag{8}
$$

Wobei die Faltungen analog zu Gleichung (2) aufgelöst werden. Es wurde auch ausgenutzt, dass $\mathcal{F}_i\mathcal{L}_i\big(\delta(\vec{r}_i)\delta(t_i)\big) = 1$. Hier ist $\mathcal{L}_i\mathcal{F}_i\; Q(\vec{r}_i, t_i)$ durch die Ratengleichung des jeweiligen Ein-Teilchen Systems gegeben.

Betrachtung anhand eines Beispiels

Für die Betrachtung zweier Teilchen, deren Korrelationsfunktion nicht separabel ist, hat mir mein Betreuer, Herr Professor Doktor Schmiedeberg, einige Kopplungsterme vorgeschlagen. Einer hiervon lautet

$$F(\vec{r}_1{}', t_1', \vec{r}_2{}', t_2') = F_1(|\ \vec{r}_1{}' - \vec{r}_2{}'\ |)\ F_2(\vec{r}_1{}', t_1')\ \delta(t_1' - t_2')$$

Es handelt sich um eine Kopplung, welche vom Abstand der beiden Teilchen in F_1 abhängt. Aufgrund der Delta-Distribution $\delta(t_1' - t_2')$ ist Teilchen 1 gesprungen, als $t_1' = t_2'$ gegeben war. Die Teilchen springen also gleichzeitig. Man kann allgemein schreiben, dass $F_1(|\ \vec{r}_1{}' - \vec{r}_2{}'\ |) = F_1'(\vec{r}_1{}', \vec{r}_2{}')$. Ich betrachte den ersten Summanden S_1, welcher in der Ratengleichung (7) vorkommt, mit der Fragestellung nach Separabilität im Fourier-Laplace Raum genauer.

$$S_1 = \int\limits_{\vec{r}_1{}'} \int\limits_{t_1'} \int\limits_{\vec{r}_2{}'} \int\limits_{t_2'} d\vec{r}_1{}' d\vec{r}_2{}' dt_1' dt_2'\, F(\vec{r}_1{}', t_1', \vec{r}_2{}', t_2') \cdot$$

$$\cdot\ Q(\vec{r}_1 - \vec{r}_1{}', t_1 - t_1', \vec{r}_2 - \vec{r}_2{}', t_2 - t_2') =$$

$$= \int\limits_{\vec{r}_1{}'} \int\limits_{t_1'} \int\limits_{\vec{r}_2{}'} \int\limits_{t_2'} d\vec{r}_1{}' d\vec{r}_2{}' dt_1' dt_2'\, F_1'(\vec{r}_1{}', \vec{r}_2{}')\ F_2(\vec{r}_1{}', t_1')\ \delta(t_1' - t_2') \cdot$$

$$\cdot\ Q(\vec{r}_1 - \vec{r}_1{}', t_1 - t_1', \vec{r}_2 - \vec{r}_2{}', t_2 - t_2') =$$

$$= \int\limits_{\vec{r}_1{}'} \int\limits_{t_1'} \int\limits_{\vec{r}_2{}'} d\vec{r}_1{}' d\vec{r}_2{}' dt_1'\, F_1'(\vec{r}_1{}', \vec{r}_2{}')\ F_2(\vec{r}_1{}', t_1') \cdot$$

$$\cdot\ Q(\vec{r}_1 - \vec{r}_1{}', t_1 - t_1', \vec{r}_2 - \vec{r}_2{}', t_2 - t_1')$$

Man konnte im letzten Schritt direkt über t_2' integrieren, so dass wegen der Delta-Distribution $\delta(t_1' - t_2')$ jedes t_2' zu t_1' wird. Wendet man die Fourier-Laplace-Transformationen an, so folgt mit Betrachtung der $\vec{k}_1, s_1, \vec{k}_2, s_2$ Abhängigkeit

$$\mathcal{L}_2\mathcal{F}_2\mathcal{L}_1\mathcal{F}_1\ S_1 = \mathcal{L}_2\mathcal{F}_2\mathcal{L}_1\mathcal{F}_1\ \Bigg(\int\limits_{\vec{r}_1{}'} \int\limits_{t_1'} \int\limits_{\vec{r}_2{}'} d\vec{r}_1{}' d\vec{r}_2{}' dt_1'\, F_1'(\vec{r}_1{}', \vec{r}_2{}')\ F_2(\vec{r}_1{}', t_1') \cdot$$

$$\cdot\ Q(\vec{r}_1 - \vec{r}_1{}', t_1 - t_1', \vec{r}_2 - \vec{r}_2{}', t_2 - t_1')\Bigg)\ (\vec{k}_1, s_1, \vec{k}_2, s_2)$$

$$= \mathcal{L}_2\mathcal{F}_2\mathcal{L}_1\mathcal{F}_1 \Big(\int\limits_{t_1'} \int\limits_{\vec{r}_2{}'} d\vec{r}_2{}' dt_1' \left(F_1'(\vec{r}_1, \vec{r}_2{}')\ F_2(\vec{r}_1, t_1') \right) *$$

$$* \ Q(\vec{r}_1, t_1 - t_1', \vec{r}_2 - \vec{r}_2{}', t_2 - t_1') \Big) (\vec{k}_1, s_1, \vec{k}_2, s_2) =$$

$$= \mathcal{L}_2\mathcal{F}_2\mathcal{L}_1 \Big(\int\limits_{t_1'} \int\limits_{\vec{r}_2{}'} d\vec{r}_2{}' dt_1'\ \mathcal{F}_1 \left(F_1'(\vec{r}_1, \vec{r}_2{}')\ F_2(\vec{r}_1, t_1') \right)(\vec{k}_1) \cdot$$

$$\cdot\ \mathcal{F}_1\ Q(\vec{r}_1, t_1 - t_1', \vec{r}_2 - \vec{r}_2{}', t_2 - t_1')(\vec{k}_1) \Big)\ (s_1, \vec{k}_2, s_2) =$$

$$= \mathcal{L}_2\mathcal{F}_2\mathcal{L}_1 \Big(\int\limits_{t_1'} dt_1'\ \mathcal{F}_1 \left(F_1'(\vec{r}_1, \vec{r}_2)\ F_2(\vec{r}_1, t_1') \right)(\vec{k}_1) *$$

$$* \mathcal{F}_1\ Q(\vec{r}_1, t_1 - t_1', \vec{r}_2, t_2 - t_1')(\vec{k}_1) \Big)\ (s_1, \vec{k}_2, s_2) =$$

$$= \mathcal{L}_2\mathcal{L}_1 \Big(\int\limits_{t_1'} dt_1'\ \mathcal{F}_2\mathcal{F}_1 \left(F_1'(\vec{r}_1, \vec{r}_2)\ F_2(\vec{r}_1, t_1') \right)(\vec{k}_1, \vec{k}_2) \cdot$$

$$\cdot\ \mathcal{F}_2\mathcal{F}_1\ Q(\vec{r}_1, t_1 - t_1', \vec{r}_2, t_2 - t_1')(\vec{k}_1, \vec{k}_2) \Big)\ (s_1, s_2)$$

Mit dem Verschiebungssatz für die Laplacetransformation $\mathcal{L}\, f(t-a) = e^{-as}\mathcal{L}\, f(t)$ lässt sich folgender Term vereinfachen

$$\mathcal{L}_2\ Q(\vec{r}_1, t_1 - t_1', \vec{r}_2, t_2 - t_1')(s_2) = e^{-t_1' \cdot s_2}\ \mathcal{L}_2\ Q(\vec{r}_1, t_1 - t_1', \vec{r}_2, t_2)(s_2) \tag{9}$$

Man kann $\mathcal{L}_2$ an allen von t_2 unabhängigen Termen vorbeiziehen

$$\mathcal{L}_2\mathcal{F}_2\mathcal{L}_1\mathcal{F}_1\ S_1 = \mathcal{L}_2\mathcal{L}_1 \Big(\int\limits_{t_1'} dt_1'\ \mathcal{F}_2\mathcal{F}_1 \left(F_1'(\vec{r}_1, \vec{r}_2)\ F_2(\vec{r}_1, t_1') \right)(\vec{k}_1, \vec{k}_2) \cdot$$

$$\cdot\ \mathcal{F}_2\mathcal{F}_1\ Q(\vec{r}_1, t_1 - t_1', \vec{r}_2, t_2 - t_1')(\vec{k}_1, \vec{k}_2) \Big)\ (s_1, s_2) =$$

$$= \mathcal{L}_1 \Big(\int\limits_{t_1'} dt_1'\ \mathcal{F}_2\mathcal{F}_1 \left(F_1'(\vec{r}_1, \vec{r}_2)\ F_2(\vec{r}_1, t_1') \right)(\vec{k}_1, \vec{k}_2) \cdot$$

$$\cdot\ \mathcal{F}_2\mathcal{F}_1\ \mathcal{L}_2\ Q(\vec{r}_1, t_1 - t_1', \vec{r}_2, t_2 - t_1')(\vec{k}_1, \vec{k}_2) \Big)\ (s_1, s_2) \overset{(9)}{=}$$

$$\overset{(9)}{=} \mathcal{L}_1 \Big(\int\limits_{t_1'} dt_1' \, \mathcal{F}_2\mathcal{F}_1 \, \big(F_1'(\vec{r}_1,\vec{r}_2) \; F_2(\vec{r}_1,t_1')\big)(\vec{k}_1,\vec{k}_2)\cdot$$

$$\cdot \, e^{-t_1'\cdot s_2} \; \mathcal{F}_2\mathcal{F}_1 \; \mathcal{L}_2 \; Q(\vec{r}_1,t_1-t_1',\vec{r}_2,t_2)(\vec{k}_1,\vec{k}_2,s_2)\Big)(s_1)$$

Jetzt wird das Integral über dt_1' als Faltung dargestellt

$$\mathcal{L}_2\mathcal{F}_2\mathcal{L}_1\mathcal{F}_1 \; S_1 = \mathcal{L}_1 \left(\mathcal{F}_2\mathcal{F}_1 \, \left(F_1'(\vec{r}_1,\vec{r}_2) \; F_2(\vec{r}_1,t_1) \cdot e^{-t_1\cdot s_2} \right)(\vec{k}_1,\vec{k}_2) \, * \right.$$

$$\left. * \; \mathcal{F}_2\mathcal{F}_1 \; \mathcal{L}_2 \; Q(\vec{r}_1,t_1,\vec{r}_2,t_2)(\vec{k}_1,\vec{k}_2,s_2) \right)(s_1) =$$

$$= \mathcal{L}_1\mathcal{F}_2\mathcal{F}_1 \, \left(F_1'(\vec{r}_1,\vec{r}_2) \; F_2(\vec{r}_1,t_1) \cdot e^{-t_1\cdot s_2} \right)(\vec{k}_1,s_1,\vec{k}_2) \, \cdot$$

$$\cdot \, \mathcal{F}_2\mathcal{F}_1\mathcal{L}_2\mathcal{L}_1 \; Q(\vec{r}_1,t_1,\vec{r}_2,t_2)(\vec{k}_1,s_1,\vec{k}_2,s_2)$$

Mit dem Dämpfungssatz $\mathcal{L}\left(e^{-at}\, f(t)\right) = F(s+a)$ wobei $F(s) = \mathcal{L}f(t)$ lässt sich noch eine Vereinfachung erzielen. Der folgende Term kommt nach Umformung im ersten Summanden vor

$$\mathcal{L}_1 \; e^{-t_1\cdot s_2} \; F_2(\vec{r}_1,t_1)(s_1) = \mathcal{L}_1 \; F_2(\vec{r}_1,t_1)(s_1+s_2) \tag{10}$$

Da $F_1'(\vec{r}_1,\vec{r}_2)$ nicht von t_1 abhängt, lässt sich $\mathcal{L}_1$ in die Klammer ziehen, und somit der Dämpfungssatz anwenden

$$\mathcal{L}_2\mathcal{F}_2\mathcal{L}_1\mathcal{F}_1 \; S_1 = \mathcal{F}_2\mathcal{F}_1 \, \left(F_1'(\vec{r}_1,\vec{r}_2) \cdot \mathcal{L}_1 \; e^{-t_1\cdot s_2} \; F_2(\vec{r}_1,t_1) \right)(\vec{k}_1,s_1,\vec{k}_2) \, \cdot$$

$$\cdot \, \mathcal{F}_2\mathcal{F}_1\mathcal{L}_2\mathcal{L}_1 \; Q(\vec{r}_1,t_1,\vec{r}_2,t_2)(\vec{k}_1,s_1,\vec{k}_2,s_2) \overset{(10)}{=}$$

$$\overset{(10)}{=} \mathcal{L}_1\mathcal{F}_2\mathcal{F}_1 \, \left(F_1'(\vec{r}_1,\vec{r}_2) \; F_2(\vec{r}_1,t_1) \right)(\vec{k}_1,\vec{k}_2,s_1+s_2)\cdot$$

$$\cdot \, \mathcal{F}_2\mathcal{F}_1\mathcal{L}_2\mathcal{L}_1 \; Q(\vec{r}_1,t_1,\vec{r}_2,t_2)(\vec{k}_1,\vec{k}_2,s_1,s_2)$$

Wobei $\mathcal{L}_1$ auf $e^{-t_1\cdot s_2} \; F_2(\vec{r}_1,t_1)$ gewirkt hat. Der Kopplungsterm ist also symmetrisch in s_1 und s_2. Setzt man wieder $F_1(\mid \vec{r}_1{}' - \vec{r}_2{}' \mid) = F_1'(\vec{r}_1{}',\vec{r}_2{}')$ ein, so schreibt sich der erste Summand zusammenfassend

$$\mathcal{L}_2\mathcal{F}_2\mathcal{L}_1\mathcal{F}_1\ S_1 = \mathcal{L}_1\mathcal{F}_2\mathcal{F}_1\ \Big(F_1(\mid \vec{r}_1 - \vec{r}_2 \mid)\ F_2(\vec{r}_1, t_1)\Big)(\vec{k}_1, \vec{k}_2, s_1 + s_2) \cdot$$

$$\cdot\ \mathcal{F}_2\mathcal{F}_1\mathcal{L}_2\mathcal{L}_1\ Q(\vec{r}_1, t_1, \vec{r}_2, t_2)(\vec{k}_1, s_1, \vec{k}_2, s_2) \tag{11}$$

Ich sehe keinerlei Separationsmöglichkeit. Auch die Hilfsfunktionen $F_A(\vec{r}_1{}', t_1')$ und $F_B(\vec{r}_2{}', t_2')$ sind aufgrund der Kopplung nicht separabel und lassen sich daher nicht vereinfachen. Allerdings kann man versuchen, Näherungen und Annahmen für die Funktion $F_1(\mid \vec{r}_1{}' - \vec{r}_2{}' \mid)$ zu tätigen. Sei beispielsweise F_1 eine Funktion der Form

$$F_1(\mid \vec{r}_1{}' - \vec{r}_2{}' \mid) = C \cdot e^{-a|\vec{r}_1{}' - \vec{r}_2{}'|}$$

Es sollen im Folgenden nur kleine Änderungen $d\vec{r}_1{}', d\vec{r}_2{}'$ um die festen Vektoren $\vec{r}_{1,0}, \vec{r}_{2,0}$ erlaubt sein. Dann kann man in diesem Fall den 6 dimensionalen Taylorreihen-Ansatz verwenden. Ich nähere den Betrag $\mid \vec{r}_1{}' - \vec{r}_2{}' \mid$ in erster Ordnung

$$\phi(\vec{r}_1{}', \vec{r}_2{}') := \mid \vec{r}_1{}' - \vec{r}_2{}' \mid$$

$$\phi(\vec{r}_{1,0} + d\vec{r}_1{}', \vec{r}_{2,0} + d\vec{r}_2{}') =$$

$$\phi(\vec{r}_1{}' = \vec{r}_{1,0}{}', \vec{r}_2{}' = \vec{r}_{2,0})\ + \sum_{i=1}^{3} dx'_{1,i}\ \left(\frac{\partial\phi}{\partial x'_{1,i}}\ \Big|_{\vec{r}_1{}' = \vec{r}_{1,0}, \vec{r}_2{}' = \vec{r}_{2,0}}\right) +$$

$$+ \sum_{i=1}^{3} dx'_{2,i}\ \left(\frac{\partial\phi}{\partial x'_{2,i}}\ \Big|_{\vec{r}_1{}' = \vec{r}_{1,0}, \vec{r}_2{}' = \vec{r}_{2,0}}\right) =$$

$$= \mid \vec{r}_{1,0} - \vec{r}_{2,0} \mid + \sum_{i=1}^{3} dx'_{1,i}\ \left(\frac{x'_{1,i} - x'_{2,i}}{\mid \vec{r}_1{}' - \vec{r}_2{}' \mid}\ \Big|_{\vec{r}_1{}' = \vec{r}_{1,0}, \vec{r}_2{}' = \vec{r}_{2,0}}\right) +$$

$$+ \sum_{i=1}^{3} dx'_{2,i}\ \left(-\frac{x'_{1,i} - x'_{2,i}}{\mid \vec{r}_1{}' - \vec{r}_2{}' \mid}\ \Big|_{\vec{r}_1{}' = \vec{r}_{1,0}, \vec{r}_2{}' = \vec{r}_{2,0}}\right) =$$

$$= \mid \vec{r}_{1,0} - \vec{r}_{2,0} \mid + \frac{d\vec{r}_1{}' \circ (\vec{r}_{1,0} - \vec{r}_{2,0})}{\mid \vec{r}_{1,0} - \vec{r}_{2,0} \mid} + \frac{d\vec{r}_2{}' \circ (\vec{r}_{2,0} - \vec{r}_{1,0})}{\mid \vec{r}_{1,0} - \vec{r}_{2,0} \mid}$$

Setzt man dieses Ergebnis in unsere Funktion F_1 ein, so folgt in linearer Näherung

$$F_1(\mid \vec{r}_{1,0} + d\vec{r}_1{}' - (\vec{r}_{2,0} + d\vec{r}_2{}') \mid) = C \cdot exp\left(-a \mid \vec{r}_{1,0} + d\vec{r}_1{}' - (\vec{r}_{2,0} + d\vec{r}_2{}') \mid\right) \approx$$

$$\approx C \cdot exp\Bigg(- a\Big(\mid \vec{r}_{1,0} - \vec{r}_{2,0} \mid + \frac{d\vec{r}_1{}' \circ (\vec{r}_{1,0} - \vec{r}_{2,0})}{\mid \vec{r}_{1,0} - \vec{r}_{2,0} \mid} + \frac{d\vec{r}_2{}' \circ (\vec{r}_{2,0} - \vec{r}_{1,0})}{\mid \vec{r}_{1,0} - \vec{r}_{2,0} \mid}\Big)\Bigg) =$$

$$= C \cdot e^{-a\left(|\vec{r}_{1,0} - \vec{r}_{2,0}|\right)} \cdot e^{-a\left(\frac{d\vec{r}_1{}' \circ (\vec{r}_{1,0} - \vec{r}_{2,0})}{|\vec{r}_{1,0} - \vec{r}_{2,0}|}\right)} \cdot e^{-a\left(\frac{d\vec{r}_2{}' \circ (\vec{r}_{2,0} - \vec{r}_{1,0})}{|\vec{r}_{1,0} - \vec{r}_{2,0}|}\right)} \tag{12}$$

Es gilt für kleine Abstände $\mid \vec{r}_1{}' - \vec{r}_2{}' \mid$

$$\lim_{\vec{r}_1{}' \to \vec{r}_2{}'} F_1(\mid \vec{r}_1{}' - \vec{r}_2{}' \mid) \to 1$$

Das heisst, dass sobald sich die Teilchen sehr nah beieinander befinden, sie dort auch mit großer Wahrscheinlichkeit bleiben. Es handelt sich um eine Anziehung. Dann lässt sich für sehr kleine $d\vec{r}_1{}', d\vec{r}_2{}'$ die Korrelationsfunktion um die Vektoren $\vec{r}_{1,0}, \vec{r}_{2,0}$ folgendermaßen schreiben

$$F(\vec{r}_{1,0} + d\vec{r}_1{}', t_1', \vec{r}_{2,0} + d\vec{r}_2{}', t_2') =$$

$$= F_1(\mid \vec{r}_{1,0} + d\vec{r}_1{}' - (\vec{r}_{2,0} + d\vec{r}_2{}') \mid)\ F_2(\vec{r}_{1,0} + d\vec{r}_1{}', t_1')\ \delta(t_1' - t_2') \overset{(12)}{\approx}$$

$$\overset{(12)}{\approx} C \cdot e^{-a\left(|\vec{r}_{1,0} - \vec{r}_{2,0}|\right)} \cdot e^{-a\left(\frac{d\vec{r}_1{}' \circ (\vec{r}_{1,0} - \vec{r}_{2,0})}{|\vec{r}_{1,0} - \vec{r}_{2,0}|}\right)} \cdot e^{-a\left(\frac{d\vec{r}_2{}' \circ (\vec{r}_{2,0} - \vec{r}_{1,0})}{|\vec{r}_{1,0} - \vec{r}_{2,0}|}\right)} \cdot$$

$$\cdot F_2(\vec{r}_{1,0}{}' + d\vec{r}_1{}', t_1')\ \delta(t_1' - t_2') =$$

$$\coloneqq C \cdot e^{-a\left(|\vec{r}_{1,0} - \vec{r}_{2,0}|\right)} \cdot G(d\vec{r}_1{}', t_1') \cdot H(d\vec{r}_2{}') \cdot \delta(t_1' - t_2') \tag{13}$$

Wobei für $G(d\vec{r}_1{}', t_1')$ und $H(d\vec{r}_2{}')$ gelten soll

$$G(d\vec{r}_1{}', t_1') = exp\left(- a\left(\frac{d\vec{r}_1{}' \circ (\vec{r}_{1,0} - \vec{r}_{2,0})}{\mid \vec{r}_{1,0} - \vec{r}_{2,0} \mid}\right)\right) \cdot F_2(\vec{r}_{1,0} + d\vec{r}_1{}', t_1')$$

$$H(d\vec{r}_2{}') = exp\left(- a\left(\frac{d\vec{r}_2{}' \circ (\vec{r}_{2,0} - \vec{r}_{1,0})}{\mid \vec{r}_{1,0} - \vec{r}_{2,0} \mid}\right)\right)$$

Es handelt sich um zwei ungekoppelte, normierbare Korrelationsfunktionen $G(d\vec{r}_1{}', t_1')\ H(d\vec{r}_2{}')$ multipliziert mit der Delta-Distribution $\delta(t_1' - t_2')$. Die Konstante $C \cdot F_1(\mid \vec{r}_{1,0} - \vec{r}_{2,0} \mid)$ kann aufgrund der Normierung weggelassen werden. Könnte man $F(\vec{r}_1{}', t_1', \vec{r}_2{}', t_2') = F_1(\vec{r}_1{}', t_1')F_2(\vec{r}_2{}', t_2')$ schreiben, so kann man Gleichung (5) benutzen. Die Wahrscheinlichkeit würde analog zu (6) folgen. Dies ist hier allerdings nicht der Fall. Man kann aber versuchen, die neue Korrelationsfunktion direkt in die Gleichung für $\mathcal{L}_2\mathcal{F}_2\mathcal{L}_1\mathcal{F}_1\ Q(\vec{r}_1, t_1, \vec{r}_2, t_2)$ (8) einzusetzen. Dabei wird $d\vec{r}_i{}'$ als $\vec{r}_i{}'$ geschrieben, wobei nur kleine Vektoren zugelassen sein sollen. Auch die Integrationsgrenzen sollen klein in der Umgebung um $\vec{r}_{1,0}{}', \vec{r}_{2,0}{}'$ gehalten werden. Betrachtet werden die Terme $\mathcal{L}_2\mathcal{F}_2\mathcal{L}_1\mathcal{F}_1\, S_1$ sowie $F_A(\vec{r}_1, t_1), F_B(\vec{r}_2, t_2)$ mit der Annahme, dass sogar $G(\vec{r}_1{}', t_1') = G_1(\vec{r}_1{}') \cdot G_2(t_1')$ separabel und normiert ist, genauer

$$\mathcal{L}_2\mathcal{F}_2\mathcal{L}_1\mathcal{F}_1\, S_1(\vec{k}_1, \vec{k}_2, s_1, s_2) \overset{(11)}{=}$$

$$\overset{(11)}{=} \mathcal{L}_1\mathcal{F}_2\mathcal{F}_1\, \Big(F_1(\mid \vec{r}_1 - \vec{r}_2 \mid)\, F_2(\vec{r}_1, t_1)\Big)(\vec{k}_1, \vec{k}_2, s_1 + s_2) \cdot$$

$$\cdot\, \mathcal{F}_2\mathcal{F}_1\mathcal{L}_2\mathcal{L}_1\, Q(\vec{r}_1, t_1, \vec{r}_2, t_2)(\vec{k}_1, s_1, \vec{k}_2, s_2) \overset{(13)}{\approx}$$

$$\overset{(13)}{\approx} \mathcal{L}_1\mathcal{F}_2\mathcal{F}_1\, \Big(G(\vec{r}_1, t_1)\, H(\vec{r}_2)\Big)(\vec{k}_1, \vec{k}_2, s_1 + s_2) \cdot$$

$$\cdot\, \mathcal{F}_2\mathcal{F}_1\mathcal{L}_2\mathcal{L}_1\, Q(\vec{r}_1, t_1, \vec{r}_2, t_2)(\vec{k}_1, s_1, \vec{k}_2, s_2) =$$

$$= \mathcal{L}_1\mathcal{F}_2\mathcal{F}_1\, \Big(G_1(\vec{r}_1)\, G_2(t_1)\, H(\vec{r}_2)\Big)(\vec{k}_1, \vec{k}_2, s_1 + s_2) \cdot$$

$$\cdot\, \mathcal{F}_2\mathcal{F}_1\mathcal{L}_2\mathcal{L}_1\, Q(\vec{r}_1, t_1, \vec{r}_2, t_2)(\vec{k}_1, s_1, \vec{k}_2, s_2) =$$

$$= \mathcal{F}_2 H(\vec{r}_2)\, \mathcal{F}_1 G_1(\vec{r}_1)\, \mathcal{L}_1 G_2(t_1)(\vec{k}_1, \vec{k}_2, s_1 + s_2) \cdot$$

$$\cdot\, \mathcal{F}_2\mathcal{F}_1\mathcal{L}_2\mathcal{L}_1\, Q(\vec{r}_1, t_1, \vec{r}_2, t_2)(\vec{k}_1, s_1, \vec{k}_2, s_2)$$

Die Hilfsfunktionen können auch ausgerechnet werden

$$F_A(\vec{r}_1, t_1) := \int\limits_{\vec{r}_2{}'} \int\limits_{t_2'} d\vec{r}_2{}' dt_2'\, F(\vec{r}_1, t_1, \vec{r}_2{}', t_2') =$$

$$= \int\limits_{\vec{r}_2{}'} \int\limits_{t_2'} d\vec{r}_2{}' dt_2'\, G(\vec{r}_1, t_1) \cdot H(\vec{r}_2{}') \cdot \delta(t_1 - t_2') =$$

$$= G(\vec{r}_1, t_1) \cdot \int\limits_{\vec{r}_2{}'} d\vec{r}_2{}' H(\vec{r}_2{}') = G(\vec{r}_1, t_1) = G_1(\vec{r}_1) \cdot G_2(t_1)$$

$$F_B(\vec{r}_2, t_2) := \int\limits_{\vec{r}_1{}'} \int\limits_{t_1'} d\vec{r}_1{}' dt_1'\, F(\vec{r}_1{}', t_1', \vec{r}_2, t_2) =$$

$$= \int\limits_{\vec{r}_1{}'} \int\limits_{t_1'} d\vec{r}_1{}' dt_1' \; G(\vec{r}_1{}', t_1') \cdot H(\vec{r}_2) \cdot \delta(t_1' - t_2) =$$

$$= H(\vec{r}_2) \cdot \int\limits_{\vec{r}_1{}'} d\vec{r}_1{}' \; G(\vec{r}_1{}', t_2) = H(\vec{r}_2) \cdot G_2(t_2) \int\limits_{\vec{r}_1{}'} d\vec{r}_1{}' \; G(\vec{r}_1{}') = H(\vec{r}_2) \cdot G_2(t_2)$$

Hiermit schreibt sich die Ratengleichung im Fourier-Laplace Raum einfacher

$$\mathcal{L}_2\mathcal{F}_2\mathcal{L}_1\mathcal{F}_1 \; Q(\vec{r}_1, t_1, \vec{r}_2, t_2) \overset{(8)}{=}$$

$$\overset{(8)}{=} \Big(\mathcal{F}_2 H(\vec{r}_2) \cdot \mathcal{F}_1 G_1(\vec{r}_1) \cdot \mathcal{L}_1 G_2(t_1)\Big)(\vec{k}_1, \vec{k}_2, s_1 + s_2) \cdot \mathcal{L}_2\mathcal{F}_2\mathcal{L}_1\mathcal{F}_1 \; Q(\vec{r}_1, t_1, \vec{r}_2, t_2) +$$

$$+ \Big(\mathcal{F}_2 \; H(\vec{r}_2) \cdot \mathcal{L}_2 G_2(t_2)\Big)(\vec{k}_2, s_2) \cdot \mathcal{L}_2\mathcal{F}_2 \; \Big(Q(\vec{r}_2, t_2)\Big)(\vec{k}_2, s_2) +$$

$$+ \Big(\mathcal{F}_1 G_1(\vec{r}_1) \cdot \mathcal{L}_1 \; G_2(t_1)\Big)(\vec{k}_1, s_1) \cdot \mathcal{L}_1\mathcal{F}_1 \; \Big(Q(\vec{r}_1, t_1)\Big)(\vec{k}_1, s_1) + 1$$

Diese Gleichung muss man nach $\mathcal{L}_2\mathcal{F}_2\mathcal{L}_1\mathcal{F}_1 \; Q(\vec{r}_1, t_1, \vec{r}_2, t_2)$ auflösen, wobei $\mathcal{L}_i\mathcal{F}_i \; Q(\vec{r}_i, t_i)$ wie eingangs schon erwähnt aus dem Ein-Teilchen System bekannt ist. Das Ergebnis setzt man in folgende Gleichung ein um auf eine Wahrscheinlichkeit $\bar{P}_s$ im Falle des Wait-first Models zu gelangen.

$$\bar{P}_s(\vec{k}_1, s_1, \vec{k}_2, s_2) = \mathcal{F}_1\mathcal{L}_1\mathcal{F}_2\mathcal{L}_2\Big(Q(\vec{r}_1, t_1, \vec{r}_2, t_2)\Big) \cdot \mathcal{L}_1 F_s(t_1)\mathcal{L}_2 F_s(t_2)$$

Diese Wahrscheinlichkeit $\bar{P}_s(\vec{k}_1, s_1, \vec{k}_2, s_2)$ ist schon im ungekoppelten Fall (6) vorgekommen. Dort durfte man allerdings Separieren. Ohne genauere Kenntnis der Funktionen lassen sich keine weiteren Aussagen treffen. Die Kopplungsfunktion $\delta(t_1' - t_2')$ stellt eine starke Bedingung an das System dar. Hätten beide Teilchen die selbe Korrelationsfunktion $f(t_i')$ in ihren jeweiligen Zeiten t_i', so wäre dieses System separierbar. An dieser Stelle sei angemerkt, dass eine gemeinsame Korrelationsfunktion sowie eine gemeinsame Initialbedingung nicht zu einer simultanen Bewegung führen. Lediglich die Wahrscheinlichkeits-Dichte ist identisch. Aus diesem Grund stellt die Forderung eines gleichzeitigen Springens einen Spezialfall dar, der meiner Einschätzung nach auch nicht mit Näherungen in ein separierbares System überführt werden kann. Mir ist keine Näherung der Delta-Distribution bekannt und es macht auch wenig Sinn, nur kleine Zeitintervalle zu betrachten. Bei Kopplungen, die nicht separabel sind, lässt sich für mich kein universelles "Kochrezept" zur Lösung feststellen. Ich denke, dass es zielführend ist, den gekoppelten Fall, falls möglich, auf einen ungekoppelten Fall zurückzuführen. Dies könnte durch Näherungen, oder wie Herr Schmiedeberg vorgeschlagen hat, durch Anwenden der Störungstheorie herbei geführt werden. Letztere soll im letzten Kapitel näher betrachtet werden.

Störungstheorie im Zwei-Teilchen System

Ziel ist es, $Q(\vec{r}_1, t_1, \vec{r}_2, t_2)$ als Summe eines ungekoppelten Falles $Q(\vec{r}_1, t_1)\, Q(\vec{r}_2, t_2)$ und einer Störung $\Delta Q(\vec{r}_1, t_1, \vec{r}_2, t_2)$ zu schreiben. Der Ansatz dafür ist die Korrelationsfunktion $F(\vec{r}_1{}', t_1', \vec{r}_2{}', t_2')$ folgendermaßen anzunähern

$$F(\vec{r}_1{}', t_1', \vec{r}_2{}', t_2') \approx F_1(\vec{r}_1{}', t_1')\; F_2(\vec{r}_2{}', t_2') + \epsilon\, \Delta F(\vec{r}_1{}', t_1', \vec{r}_2{}', t_2')$$

Wobei $\Delta F(\vec{r}_1{}', t_1', \vec{r}_2{}', t_2')$ klein sein soll. Diesen Ausruck setzt man in eine Potenzreihe von Q ein. Ich nähere bis zur ersten Ordnung.

$$Q(\vec{r}_1, t_1, \vec{r}_2, t_2) \approx Q^0(\vec{r}_1, t_1, \vec{r}_2, t_2) + \epsilon\, Q^1(\vec{r}_1, t_1, \vec{r}_2, t_2)$$

Für $\epsilon = 0$ tritt der ungekoppelte Fall $F(\vec{r}_1{}', t_1', \vec{r}_2{}', t_2') = F_1(\vec{r}_1{}', t_1')\; F_2(\vec{r}_2{}', t_2')$ in Kraft. Man darf also annehmen, dass die nullte Ordnung dem ungekoppelten System $Q^0(\vec{r}_1, t_1, \vec{r}_2, t_2) = Q^0(\vec{r}_1, t_1)\; Q^0(\vec{r}_2, t_2)$ entspricht. Im Folgenden soll $Q^i{}'(\vec{r}_1, t_1, \vec{r}_2, t_2) = Q^i(\vec{r}_1 - \vec{r}_1{}', t_1 - t_1', \vec{r}_2 - \vec{r}_2{}', t_2 - t_2')$ mit der i-ten Ordnung gelten. Die allgemeine Ratengleichung wurde in (7) eingeführt.

$$Q(\vec{r}_1, t_1, \vec{r}_2, t_2) \approx Q^0(\vec{r}_1, t_1, \vec{r}_2, t_2) + \epsilon\, Q^1(\vec{r}_1, t_1, \vec{r}_2, t_2) =$$

$$= \int\limits_{\vec{r}_1{}'} \int\limits_{t_1'} \int\limits_{\vec{r}_2{}'} \int\limits_{t_2'} d\vec{r}_1{}' d\vec{r}_2{}' dt_1' dt_2' \left(F_1(\vec{r}_1{}', t_1')\; F_2(\vec{r}_2{}', t_2') + \epsilon\, \Delta F(\vec{r}_1{}', t_1', \vec{r}_2{}', t_2') \right) \cdot$$

$$\cdot \left(Q^0{}'(\vec{r}_1, t_1, \vec{r}_2, t_2) + \epsilon\, Q^1{}'(\vec{r}_1, t_1, \vec{r}_2, t_2) \right) +$$

$$+ \delta(\vec{r}_1)\delta(t_1) \cdot$$

$$\cdot \int\limits_{\vec{r}_1{}'} \int\limits_{t_1'} \int\limits_{\vec{r}_2{}'} \int\limits_{t_2'} d\vec{r}_1{}' d\vec{r}_2{}' dt_1' dt_2' \left(F_1(\vec{r}_1{}', t_1')\; F_2(\vec{r}_2{}', t_2') + \epsilon\, \Delta\; F(\vec{r}_1{}', t_1', \vec{r}_2{}', t_2') \right) \cdot$$

$$\cdot \left(Q^0{}'(\vec{r}_2, t_2) + \epsilon\, Q^1{}'(\vec{r}_2, t_2) \right) +$$

$$+ \delta(\vec{r}_2)\delta(t_2) \cdot$$

$$\cdot \int\limits_{\vec{r}_1{}'} \int\limits_{t_1'} \int\limits_{\vec{r}_2{}'} \int\limits_{t_2'} d\vec{r}_1{}' d\vec{r}_2{}' dt_1' dt_2' \left(F_1(\vec{r}_1{}', t_1')\; F_2(\vec{r}_2{}', t_2') + \epsilon\, \Delta\; F(\vec{r}_1{}', t_1', \vec{r}_2{}', t_2') \right) \cdot$$

$$\cdot \left(Q^0{}'(\vec{r}_1, t_1) + \epsilon\, Q^1{}'(\vec{r}_1, t_1) \right) +$$

$$+\,\delta(\vec{r}_1)\delta(t_1)\delta(\vec{r}_2)\delta(t_2)\,\cdot$$

$$\cdot\int\limits_{\vec{r}_1\,'}\int\limits_{t_1'}\int\limits_{\vec{r}_2\,'}\int\limits_{t_2'} d\vec{r}_1\,'d\vec{r}_2\,'dt_1'dt_2'\left(F_1(\vec{r}_1\,',t_1')\;F_2(\vec{r}_2\,',t_2')+\epsilon\,\Delta F(\vec{r}_1\,',t_1',\vec{r}_2\,',t_2')\right)$$

Der erste Summand liefert

$$\int\limits_{\vec{r}_1\,'}\int\limits_{t_1'}\int\limits_{\vec{r}_2\,'}\int\limits_{t_2'} d\vec{r}_1\,'d\vec{r}_2\,'dt_1'dt_2'\left(F_1(\vec{r}_1\,',t_1')\;F_2(\vec{r}_2\,',t_2')+\epsilon\,\Delta F(\vec{r}_1\,',t_1',\vec{r}_2\,',t_2')\right)\cdot$$

$$\cdot\;\left(Q^{0\,\prime}(\vec{r}_1,t_1,\vec{r}_2,t_2)+\epsilon\,Q^{1\,\prime}(\vec{r}_1,t_1,\vec{r}_2,t_2)\right)=$$

$$=\int\limits_{\vec{r}_1\,'}\int\limits_{t_1'}\int\limits_{\vec{r}_2\,'}\int\limits_{t_2'} d\vec{r}_1\,'d\vec{r}_2\,'dt_1'dt_2'\,F_1(\vec{r}_1\,',t_1')\;F_2(\vec{r}_2\,',t_2')\cdot Q^{0\,\prime}(\vec{r}_1,t_1,\vec{r}_2,t_2)\;+ \tag{I}$$

$$+\int\limits_{\vec{r}_1\,'}\int\limits_{t_1'}\int\limits_{\vec{r}_2\,'}\int\limits_{t_2'} d\vec{r}_1\,'d\vec{r}_2\,'dt_1'dt_2'\,\epsilon\;\Delta F(\vec{r}_1\,',t_1',\vec{r}_2\,',t_2')\cdot Q^{0\,\prime}(\vec{r}_1,t_1,\vec{r}_2,t_2)\;+ \tag{II}$$

$$+\int\limits_{\vec{r}_1\,'}\int\limits_{t_1'}\int\limits_{\vec{r}_2\,'}\int\limits_{t_2'} d\vec{r}_1\,'d\vec{r}_2\,'dt_1'dt_2'\,F_1(\vec{r}_1\,',t_1')\;F_2(\vec{r}_2\,',t_2')\cdot\epsilon\;Q^{1\,\prime}(\vec{r}_1,t_1,\vec{r}_2,t_2)\;+ \tag{III}$$

$$+\int\limits_{\vec{r}_1\,'}\int\limits_{t_1'}\int\limits_{\vec{r}_2\,'}\int\limits_{t_2'} d\vec{r}_1\,'d\vec{r}_2\,'dt_1'dt_2'\,\epsilon^2\;\Delta F(\vec{r}_1\,',t_1',\vec{r}_2\,',t_2')\cdot Q^{1\,\prime}(\vec{r}_1,t_1,\vec{r}_2,t_2) \tag{IV}$$

Der zweite Summand liefert

$$\delta(\vec{r}_1)\delta(t_1)\,\cdot$$

$$\cdot\int\limits_{\vec{r}_1\,'}\int\limits_{t_1'}\int\limits_{\vec{r}_2\,'}\int\limits_{t_2'} d\vec{r}_1\,'d\vec{r}_2\,'dt_1'dt_2'\left(F_1(\vec{r}_1\,',t_1')\;F_2(\vec{r}_2\,',t_2')+\epsilon\;\Delta\;F(\vec{r}_1\,',t_1',\vec{r}_2\,',t_2')\right)\cdot$$

$$\cdot\;\left(Q^{0\,\prime}(\vec{r}_2,t_2)+\epsilon\,Q^{1\,\prime}(\vec{r}_2,t_2)\right)=$$

$$=\delta(\vec{r}_1)\delta(t_1)\,\cdot$$

$$\cdot \int\limits_{\vec{r}_1{}'}\int\limits_{t_1'}\int\limits_{\vec{r}_2{}'}\int\limits_{t_2'} d\vec{r}_1{}'d\vec{r}_2{}'dt_1'dt_2'\, F_1(\vec{r}_1{}',t_1')\; F_2(\vec{r}_2{}',t_2') \cdot Q^0{}'(\vec{r}_2,t_2) + \tag{I}$$

$$+\, \delta(\vec{r}_1)\delta(t_1) \cdot$$

$$\cdot \int\limits_{\vec{r}_1{}'}\int\limits_{t_1'}\int\limits_{\vec{r}_2{}'}\int\limits_{t_2'} d\vec{r}_1{}'d\vec{r}_2{}'dt_1'dt_2'\, \epsilon\; \Delta\; F(\vec{r}_1{}',t_1',\vec{r}_2{}',t_2') \cdot Q^0{}'(\vec{r}_2,t_2) + \tag{II}$$

$$+\, \delta(\vec{r}_1)\delta(t_1) \cdot$$

$$\cdot \int\limits_{\vec{r}_1{}'}\int\limits_{t_1'}\int\limits_{\vec{r}_2{}'}\int\limits_{t_2'} d\vec{r}_1{}'d\vec{r}_2{}'dt_1'dt_2'\, F_1(\vec{r}_1{}',t_1')\; F_2(\vec{r}_2{}',t_2') \cdot \epsilon\, Q^1{}'(\vec{r}_2,t_2) + \tag{III}$$

$$+\, \delta(\vec{r}_1)\delta(t_1) \cdot$$

$$\cdot \int\limits_{\vec{r}_1{}'}\int\limits_{t_1'}\int\limits_{\vec{r}_2{}'}\int\limits_{t_2'} d\vec{r}_1{}'d\vec{r}_2{}'dt_1'dt_2'\, \epsilon^2\; \Delta\; F(\vec{r}_1{}',t_1',\vec{r}_2{}',t_2') \cdot Q^1{}'(\vec{r}_2,t_2) \tag{IV}$$

Der dritte Summand liefert

$$\delta(\vec{r}_2)\delta(t_2) \cdot$$

$$\cdot \int\limits_{\vec{r}_1{}'}\int\limits_{t_1'}\int\limits_{\vec{r}_2{}'}\int\limits_{t_2'} d\vec{r}_1{}'d\vec{r}_2{}'dt_1'dt_2' \Big(F_1(\vec{r}_1{}',t_1')\; F_2(\vec{r}_2{}',t_2') + \epsilon\; \Delta\; F(\vec{r}_1{}',t_1',\vec{r}_2{}',t_2')\Big) \cdot$$

$$\cdot\; \Big(Q^0{}'(\vec{r}_1,t_1) + \epsilon\, Q^1{}'(\vec{r}_1,t_1)\Big) =$$

$$= \delta(\vec{r}_2)\delta(t_2) \cdot$$

$$\cdot \int\limits_{\vec{r}_1{}'}\int\limits_{t_1'}\int\limits_{\vec{r}_2{}'}\int\limits_{t_2'} d\vec{r}_1{}'d\vec{r}_2{}'dt_1'dt_2'\, F_1(\vec{r}_1{}',t_1')\; F_2(\vec{r}_2{}',t_2') \cdot Q^0{}'(\vec{r}_1,t_1) + \tag{I}$$

$$+\, \delta(\vec{r}_2)\delta(t_2) \cdot$$

$$\cdot \int\limits_{\vec{r}_1{}'}\int\limits_{t_1'}\int\limits_{\vec{r}_2{}'}\int\limits_{t_2'} d\vec{r}_1{}'d\vec{r}_2{}'dt_1'dt_2'\, \epsilon\; \Delta\; F(\vec{r}_1{}',t_1',\vec{r}_2{}',t_2') \cdot Q^0{}'(\vec{r}_1,t_1) + \tag{II}$$

$$+ \delta(\vec{r}_2)\delta(t_2) \cdot$$

$$\cdot \int\limits_{\vec{r}_1{}'}\int\limits_{t_1'}\int\limits_{\vec{r}_2{}'}\int\limits_{t_2'} d\vec{r}_1{}' d\vec{r}_2{}' dt_1' dt_2'\, F_1(\vec{r}_1{}', t_1')\; F_2(\vec{r}_2{}', t_2') \cdot \epsilon\, Q^1{}'(\vec{r}_1, t_1) + \tag{III}$$

$$+ \delta(\vec{r}_2)\delta(t_2) \cdot$$

$$\cdot \int\limits_{\vec{r}_1{}'}\int\limits_{t_1'}\int\limits_{\vec{r}_2{}'}\int\limits_{t_2'} d\vec{r}_1{}' d\vec{r}_2{}' dt_1' dt_2'\, \epsilon^2\; \Delta\; F(\vec{r}_1{}', t_1', \vec{r}_2{}', t_2') \cdot Q^1{}'(\vec{r}_1, t_1) \tag{IV}$$

Der vierte Summand liefert

$$\delta(\vec{r}_1)\delta(t_1)\delta(\vec{r}_2)\delta(t_2) \cdot$$

$$\cdot \int\limits_{\vec{r}_1{}'}\int\limits_{t_1'}\int\limits_{\vec{r}_2{}'}\int\limits_{t_2'} d\vec{r}_1{}' d\vec{r}_2{}' dt_1' dt_2' \Big(F_1(\vec{r}_1{}', t_1')\; F_2(\vec{r}_2{}', t_2') + \epsilon\; \Delta F(\vec{r}_1{}', t_1', \vec{r}_2{}', t_2')\Big) =$$

$$= \delta(\vec{r}_1)\delta(t_1)\delta(\vec{r}_2)\delta(t_2) + \tag{I}$$

$$+ \delta(\vec{r}_1)\delta(t_1)\delta(\vec{r}_2)\delta(t_2) \cdot \int\limits_{\vec{r}_1{}'}\int\limits_{t_1'}\int\limits_{\vec{r}_2{}'}\int\limits_{t_2'} d\vec{r}_1{}' d\vec{r}_2{}' dt_1' dt_2'\, \epsilon\; \Delta F(\vec{r}_1{}', t_1', \vec{r}_2{}', t_2') \tag{II}$$

Jetzt fasst man alle Summanden nullter Ordnung ϵ^0 und erster Ordnung ϵ^1 zusammen. Ich beginne mit der nullten Ordnung. In Betracht kommen alle mit (I) gekennzeichneten Summanden. Ich nenne die Summe dieser Terme $S_{\epsilon^0}(I)$.

$$S_{\epsilon^0}(I) =$$

$$\int\limits_{\vec{r}_1{}'}\int\limits_{t_1'}\int\limits_{\vec{r}_2{}'}\int\limits_{t_2'} d\vec{r}_1{}' d\vec{r}_2{}' dt_1' dt_2'\, F_1(\vec{r}_1{}', t_1')\; F_2(\vec{r}_2{}', t_2') \cdot Q^0{}'(\vec{r}_1, t_1, \vec{r}_2, t_2) + \tag{I}$$

$$+ \delta(\vec{r}_1)\delta(t_1) \cdot \int\limits_{\vec{r}_1{}'}\int\limits_{t_1'}\int\limits_{\vec{r}_2{}'}\int\limits_{t_2'} d\vec{r}_1{}' d\vec{r}_2{}' dt_1' dt_2'\, F_1(\vec{r}_1{}', t_1')\; F_2(\vec{r}_2{}', t_2') \cdot Q^0{}'(\vec{r}_2, t_2) + \tag{I}$$

$$+ \delta(\vec{r}_2)\delta(t_2) \cdot \int\limits_{\vec{r}_1{}'}\int\limits_{t_1'}\int\limits_{\vec{r}_2{}'}\int\limits_{t_2'} d\vec{r}_1{}' d\vec{r}_2{}' dt_1' dt_2'\, F_1(\vec{r}_1{}', t_1')\; F_2(\vec{r}_2{}', t_2') \cdot Q^0{}'(\vec{r}_1, t_1) + \tag{I}$$

$$+\,\delta(\vec{r}_1)\delta(t_1)\delta(\vec{r}_2)\delta(t_2) = \tag{I}$$

$$= \int\limits_{\vec{r}_1{}'}\int\limits_{t_1'} d\vec{r}_1{}' dt_1'\, F_1(\vec{r}_1{}', t_1')\; Q^0{}'(\vec{r}_1, t_1) + \delta(\vec{r}_1)\delta(t_1)\,\cdot$$

$$\cdot \int\limits_{\vec{r}_2{}'}\int\limits_{t_2'} d\vec{r}_2{}' dt_2'\; F_2(\vec{r}_2{}', t_2')\; Q^0{}'(\vec{r}_2, t_2) + \delta(\vec{r}_2)\delta(t_2) = Q^0_{F_1}(\vec{r}_1, t_1)\cdot Q^0_{F_2}(\vec{r}_2, t_2)$$

Dies gilt, falls in einem Punkt Separierbarkeit herrschte. Es wurde auch ausgenutzt, dass $\int\limits_{\vec{r}_i{}'}\int\limits_{t_i'} d\vec{r}_i{}' dt_i' F_i(\vec{r}_i{}', t_i') = 1$ Dabei soll der Index F_1, F_2 zeigen, um welche Korrelationsfunktion es sich handelt. Man kennt diese Gleichung schon aus (5). Für Terme erster Ordnung kommen die mit II und III gekennzeichneten Summanden in Frage. Diese Summe nenne ich $S_{\epsilon^1}(II+III)$.

$$S_{\epsilon^1}(II+III) =$$

$$\epsilon \int\limits_{\vec{r}_1{}'}\int\limits_{t_1'}\int\limits_{\vec{r}_2{}'}\int\limits_{t_2'} d\vec{r}_1{}' d\vec{r}_2{}' dt_1' dt_2'\, \Delta F(\vec{r}_1{}', t_1', \vec{r}_2{}', t_2')\cdot Q^0{}'(\vec{r}_1, t_1, \vec{r}_2, t_2) + \tag{II}$$

$$+\,\epsilon\; \delta(\vec{r}_1)\delta(t_1)\cdot \int\limits_{\vec{r}_1{}'}\int\limits_{t_1'}\int\limits_{\vec{r}_2{}'}\int\limits_{t_2'} d\vec{r}_1{}' d\vec{r}_2{}' dt_1' dt_2'\, \Delta\; F(\vec{r}_1{}', t_1', \vec{r}_2{}', t_2')\cdot Q^0{}'(\vec{r}_2, t_2) + \tag{II}$$

$$+\,\epsilon\; \delta(\vec{r}_2)\delta(t_2)\cdot \int\limits_{\vec{r}_1{}'}\int\limits_{t_1'}\int\limits_{\vec{r}_2{}'}\int\limits_{t_2'} d\vec{r}_1{}' d\vec{r}_2{}' dt_1' dt_2'\, \Delta\; F(\vec{r}_1{}', t_1', \vec{r}_2{}', t_2')\cdot Q^0{}'(\vec{r}_1, t_1) + \tag{II}$$

$$+\,\epsilon\; \delta(\vec{r}_1)\delta(t_1)\delta(\vec{r}_2)\delta(t_2)\cdot \int\limits_{\vec{r}_1{}'}\int\limits_{t_1'}\int\limits_{\vec{r}_2{}'}\int\limits_{t_2'} d\vec{r}_1{}' d\vec{r}_2{}' dt_1' dt_2'\, \Delta F(\vec{r}_1{}', t_1', \vec{r}_2{}', t_2') \tag{II}$$

$$+\,\epsilon \int\limits_{\vec{r}_1{}'}\int\limits_{t_1'}\int\limits_{\vec{r}_2{}'}\int\limits_{t_2'} d\vec{r}_1{}' d\vec{r}_2{}' dt_1' dt_2'\, F_1(\vec{r}_1{}', t_1')\; F_2(\vec{r}_2{}', t_2')\cdot Q^1{}'(\vec{r}_1, t_1, \vec{r}_2, t_2) + \tag{III}$$

$$+\,\epsilon\; \delta(\vec{r}_1)\delta(t_1)\cdot \int\limits_{\vec{r}_1{}'}\int\limits_{t_1'}\int\limits_{\vec{r}_2{}'}\int\limits_{t_2'} d\vec{r}_1{}' d\vec{r}_2{}' dt_1' dt_2'\, F_1(\vec{r}_1{}', t_1')\; F_2(\vec{r}_2{}', t_2')\cdot Q^1{}'(\vec{r}_2, t_2) + \tag{III}$$

$$+\,\epsilon\; \delta(\vec{r}_2)\delta(t_2)\cdot \int\limits_{\vec{r}_1{}'}\int\limits_{t_1'}\int\limits_{\vec{r}_2{}'}\int\limits_{t_2'} d\vec{r}_1{}' d\vec{r}_2{}' dt_1' dt_2'\, F_1(\vec{r}_1{}', t_1')\; F_2(\vec{r}_2{}', t_2')\cdot Q^1{}'(\vec{r}_1, t_1) \tag{III}$$

Man kann die mit (II) gekennzeichneten Summanden zusammenfassen. Es handelt sich um die Ratengleichung (7) von $Q^0(\vec{r}_1, t_1, \vec{r}_2, t_2)$ mit der Korrelationsfunktion $\Delta F(\vec{r}_1\,', t_1', \vec{r}_2\,', t_2')$. Ich nenne sie $Q^0_{\Delta F}$. Dann folgt mit Addition einer Null $0 = \epsilon\ \delta(\vec{r}_1)\delta(t_1)\delta(\vec{r}_2)\delta(t_2) - \epsilon\ \delta(\vec{r}_1)\delta(t_1)\delta(\vec{r}_2)\delta(t_2)$.

$$S_{\epsilon^1}(II + III) =$$

$$\epsilon\ Q^0_{\Delta F} +$$

$$+\,\epsilon \int\limits_{\vec{r}_1\,'}\int\limits_{t_1'}\int\limits_{\vec{r}_2\,'}\int\limits_{t_2'} d\vec{r}_1\,'d\vec{r}_2\,'dt_1'dt_2'\, F_1(\vec{r}_1\,', t_1')\ F_2(\vec{r}_2\,', t_2') \cdot Q^1\,'(\vec{r}_1, t_1, \vec{r}_2, t_2) + \qquad \text{(III)}$$

$$+\,\epsilon\ \delta(\vec{r}_1)\delta(t_1) \cdot \int\limits_{\vec{r}_1\,'}\int\limits_{t_1'}\int\limits_{\vec{r}_2\,'}\int\limits_{t_2'} d\vec{r}_1\,'d\vec{r}_2\,'dt_1'dt_2'\, F_1(\vec{r}_1\,', t_1')\ F_2(\vec{r}_2\,', t_2') \cdot Q^1\,'(\vec{r}_2, t_2) + \qquad \text{(III)}$$

$$+\,\epsilon\ \delta(\vec{r}_2)\delta(t_2) \cdot \int\limits_{\vec{r}_1\,'}\int\limits_{t_1'}\int\limits_{\vec{r}_2\,'}\int\limits_{t_2'} d\vec{r}_1\,'d\vec{r}_2\,'dt_1'dt_2'\, F_1(\vec{r}_1\,', t_1')\ F_2(\vec{r}_2\,', t_2') \cdot Q^1\,'(\vec{r}_1, t_1) + \qquad \text{(III)}$$

$$+\,\epsilon\ \delta(\vec{r}_1)\delta(t_1)\delta(\vec{r}_2)\delta(t_2) -$$

$$-\,\epsilon\ \delta(\vec{r}_1)\delta(t_1)\delta(\vec{r}_2)\delta(t_2) =$$

$$= \epsilon\ Q^0_{\Delta F} +$$

$$+\,\epsilon \int\limits_{\vec{r}_1\,'}\int\limits_{t_1'} d\vec{r}_1\,'dt_1'\ F_1(\vec{r}_1\,', t_1')\ Q^1\,'(\vec{r}_1, t_1) + \delta(\vec{r}_1)\delta(t_1)\ \cdot$$

$$\cdot \int\limits_{\vec{r}_2\,'}\int\limits_{t_2'} d\vec{r}_2\,'dt_2'\ F_2(\vec{r}_2\,', t_2')\ Q^1\,'(\vec{r}_2, t_2) + \delta(\vec{r}_2)\delta(t_2) -$$

$$-\,\epsilon\ \delta(\vec{r}_1)\delta(t_1)\delta(\vec{r}_2)\delta(t_2) =$$

$$= \epsilon\ Q^0_{\Delta F} + \epsilon\ Q^1_{F_1}(\vec{r}_1, t_1)\ Q^1_{F_2}(\vec{r}_2, t_2) - \epsilon\ \delta(\vec{r}_1)\delta(t_1)\delta(\vec{r}_2)\delta(t_2)$$

Wiederum konnte man die mit (III) gekennzeichneten Summanden zusammen mit der Delta-Distribution $+\epsilon\ \delta(\vec{r}_1)\delta(t_1)\delta(\vec{r}_2)\delta(t_2)$ vereinfachen. Es handelt sich um die separierbare Ratengleichung von $Q^1(\vec{r}_1, t_1, \vec{r}_2, t_2)$ bezüglich der Korrelationsfunktionen $F_1(\vec{r}_1\,', t_1'), F_2(\vec{r}_2\,', t_2')$ aus (5). Terme, die mit IV gekennzeichnet sind enthalten ein ϵ^2 und können vernachlässigt werden.

Die Näherung von $Q(\vec{r}_1, t_1, \vec{r}_2, t_2)$ in 1. Ordnung lautet

$$Q(\vec{r}_1, t_1, \vec{r}_2, t_2) \approx Q^0(\vec{r}_1, t_1, \vec{r}_2, t_2) + \epsilon\, Q^1(\vec{r}_1, t_1, \vec{r}_2, t_2) = S_{\epsilon^0}(I) + S_{\epsilon^1}(II + III) + \mathcal{O}(\epsilon^2) =$$

$$= Q^0_{F_1}(\vec{r}_1, t_1) \cdot Q^0_{F_2}(\vec{r}_2, t_2) +$$

$$+ \epsilon \left(Q^0_{\Delta F}(\vec{r}_1, t_1, \vec{r}_2, t_2) + Q^1_{F_1}(\vec{r}_1, t_1)\; Q^1_{F_2}(\vec{r}_2, t_2) - \delta(\vec{r}_1)\delta(t_1)\delta(\vec{r}_2)\delta(t_2) \right) + \mathcal{O}(\epsilon^2)$$

Man kann die Terme ohne den Faktor ϵ und mit dem Faktor ϵ vergleichen. Es folgt

$$Q^0(\vec{r}_1, t_1, \vec{r}_2, t_2) = Q^0_{F_1}(\vec{r}_1, t_1) \cdot Q^0_{F_2}(\vec{r}_2, t_2)$$

$$Q^1(\vec{r}_1, t_1, \vec{r}_2, t_2) = Q^0_{\Delta F}(\vec{r}_1, t_1, \vec{r}_2, t_2) + Q^1_{F_1}(\vec{r}_1, t_1)\; Q^1_{F_2}(\vec{r}_2, t_2) - \delta(\vec{r}_1)\delta(t_1)\delta(\vec{r}_2)\delta(t_2)$$

Der Term nullter Ordnung ist also tatsächlich separierbar und durch die Korrelationsfunktionen F_1, F_2 beschrieben. Das Produkt der Delta-Distributionen $\delta(\vec{r}_1)\delta(t_1)\delta(\vec{r}_2)\delta(t_2)$ ist bemerkenswert. Vielleicht kommt es daher, dass zu viel Fälle abgezählt werden. So ist in $Q(\vec{r}_1, t_1, \vec{r}_2, t_2 \mid \vec{r}_i = 0, t_i = 0)$ auch der Fall, dass beide Teilchen im Ursprung starteten, enthalten. Dies ist der Fall, da sich ein Teilchen irgendwo befinden kann, während das jeweils andere Teilchen im Ursprung startete. Aber verständlich machen kann ich es mir nicht. Außerdem enthält $Q^1(\vec{r}_1, t_1, \vec{r}_2, t_2)$ einen ungekoppelten Summanden $Q^1_{F_1}(\vec{r}_1, t_1)\; Q^1_{F_2}(\vec{r}_2, t_2)$. Die Korrelationsfunktion $\Delta F(\vec{r}_1{}', t_1', \vec{r}_2{}', t_2')$ taucht in Form einer allgemeinen Ratengleichung mit Kopplung in $Q^0_{\Delta F}$ auf. Zusammenfassend möchte ich festhalten, dass die Störungstheorie scheinbar ein mächtiges Werkzeug im Umgang mit Mehr-Teilchen Systemen darstellt. Die mir gegebene Beispiel-Korrelationsfunktion konnte ich allerdings aufgrund der Delta-Distribution $\delta(t_1' - t_2')$ nicht in eine passende Form $F_1(\vec{r}_1{}', t_1')\;\; F_2(\vec{r}_2{}', t_2') + \epsilon\;\; \Delta F(\vec{r}_1{}', t_1', \vec{r}_2{}', t_2')$ bringen. Den einen analytischen Lösungsweg von Wahrscheinlichkeitsfunktion über Wahrscheinlichkeitsdichte hin zur Wahrscheinlichkeit sehe ich nicht. Man muss wohl sinnvolle Näherungen und Annahmen tätigen. Ich möchte abschliessend Herrn Schmiedeberg für die Hilfestellung bezüglich vieler meiner Fragen danken.

Literaturverzeichnis

[1] Oliver C. Ibe. *Elements of Random Walk and Diffusion Processes*. Wiley, 2013, S. 18–19.

[2] Oliver C. Ibe. *Elements of Random Walk and Diffusion Processes*. Wiley, 2013, S. 178–195.

[3] Oliver C. Ibe. *Elements of Random Walk and Diffusion Processes*. Wiley, 2013, S. 188.

[4] Oliver C. Ibe. *Elements of Random Walk and Diffusion Processes*. Wiley, 2013, S. 176–177.

[5] Norbert Henze. *Stochastik für Einsteiger*. Springer Spektrum Berlin, Heidelberg, 2021, S. 328.

[6] Holger Stark Michael Schmiedeberg Vasily Yu Zaburdaev. "On moments and scaling regimes in anomalous random walks". *Journal of Statistical Mechanics: Theory and Experiment* (2009).

Hilfsmittelverzeichnis

[7] Lew W. S. *Geogebra*. `https://www.geogebra.org` [Accessed: (2024)].

[8] *Wolfram Alpha*. `https://www.wolframalpha.com` [Accessed: (2024)].

Eidesstattliche Erklärung

Hiermit versichere ich, Jamin Krieger, dass ich die vorliegende Arbeit selbständig und ohne unerlaubte Hilfsmittel verfasst habe. Ich habe keine anderen als die angegebenen Quellen und Hilfsmittel benutzt und alle wörtlich oder dem Sinn nach aus anderen Texten entnommenen Stellen als solche kenntlich gemacht. Dies gilt für gedruckte Texte wie für Texte aus dem Internet. Alle Stellen und Personen, welche mich bei der Vorbereitung und Anfertigung der Abhandlung unterstützten, habe ich genannt. Die Arbeit wurde in der vorliegenden bzw. modifizierten Form noch keiner anderen Stelle zur Prüfung vorgelegt und dieselbe hat auch nicht anderen Zwecken – auch nicht teilweise – gedient. Mit einer Plagiatsprüfung bin ich einverstanden. Mir ist bewusst, dass jeder Verstoß gegen diese Erklärung eine Bewertung der eingereichten Arbeit mit Note “ungenügend“ zur Folge hat.

....

Ort, Datum Unterschrift