

Klassische Mechanik auf finiten projektiven Geometrien

Bachelorarbeit der Physik

Vorgelegt von

Florian Simon

27. August 2020



Institut für Theoretische Physik I
Friedrich-Alexander-Universität Erlangen-Nürnberg
Betreuer: Prof. Dr. Klaus Mecke

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung	3
2 Projektiver Raum und Biquadrikfeld	3
2.1 Projektive Geometrie	3
2.2 Übergang zum finiten Körper	5
2.3 Biquadrik als Nachbarschaftsrelation	6
2.4 Projektivitäten und Translation	7
3 Näherung für klassische Mechanik in \mathbb{Z}	10
3.1 Form und Geschlossenheit der Biquadrik	10
4 Dynamik von Massepunkten	13
4.1 Kräftefreie Bewegung und Trägheit	13
4.2 Das projektive Kraftfeld	14
4.3 Bewegung im Kraftfeld	15
5 Legendretransformation und Phasenraum	17
5.1 Harmonische Teilung und Polare	17
5.2 Kanonischer Impuls und Legendretransformation	19
6 Anwendung: Der harmonische Oszillator	21
6.1 Trajektorie in Orts- und Phasenraum	21
6.2 Energie und Potential	23
7 Fazit	25

1 Einleitung

In der bisherigen physikalischen Wahrnehmung wurde die Raumzeit immer als 4-dimensionales Kontinuum angenommen, sowohl bei Newton schon als auch bei Einstein basierte die Physik immer auf den reellen Zahlen. Seit der Entdeckung der Quantenmechanik wird immer klarer, dass viele physikalische Größen nicht kontinuierlich, sondern diskret sind. Damit stellt sich natürlich auch die Frage, ob die Raumzeit nicht auch diskretisiert sein könnte. Die hier vorgestellte Theorie nimmt deshalb die Raumzeit als projektive Geometrie über einem endlichen Körper an. Natürlich stellt sich dann die Frage, wie die bisher bekannten physikalischen Gesetzmäßigkeiten wie Elektromagnetismus, Gravitation und Quantenmechanik im Rahmen dieses Modells erklärt werden können. In diesen Kanon soll sich diese Arbeit einreihen, indem als die Grundlage dieser Überlegungen die Dynamik von Massepunkten erklärt werden soll. Wir stellen uns hier noch nicht die Frage, woher die Kräfte stammen, sondern wie Kraftfelder auf die Bewegung von Massepunkten wirken und wie dies mit der kontinuierlichen Theorie in Einklang gebracht werden kann. Dazu werden nun zuerst die theoretischen Grundlagen erläutert und dann am Modell des klassischen harmonischen Oszillators auf den Prüfstand gestellt.

2 Projektiver Raum und Biquadrifikfeld

Zunächst soll nun die grundlegende algebraische Struktur eingeführt werden, auf der wir unsere Überlegungen anstellen werden.

2.1 Projektive Geometrie

Eine Geometrie braucht grundsätzlich Punkte, Linien und eine Inzidenzrelation, die Schnitte zwischen diesen Objekten festlegt. Eine physikalisch sinnvolle Geometrie sollte folgende Axiome (vgl. [1, Kap. 1.2]) erfüllen:

P1 Für zwei verschiedene Punkte existiert nur genau eine Linie, die beide Punkte enthält.

P2 Für zwei verschiedene Linien gibt es nur genau einen Schnittpunkt, der in beiden Linien enthalten ist.

P3 Jede Gerade schneidet mindestens drei Punkte.

P4 Ein linearer Raum wird projektiver Raum genannt, genau dann wenn jeder 2-dimensionale Raum eine projektive Ebene ist.

Im Rahmen dieser Axiome enthalten sind unter anderem auch die klassischen kontinuierlichen Geometrien der Physik, aber eine finite projektive Geometrie ist die einfachste Geometrie, die diese Axiome erfüllt. [2, S. 13]

Nach Veblen und Young [3] lässt sich eine projektive Geometrie der Dimension d als affine Hyperebene eingebettet in einem $d + 1$ -dimensionalen Raum darstellen. Die Punkte der projektiven Geometrie können dann auf zwei verschiedene Arten parametrisiert werden: homogene und inhomogene

Koordinaten. Die inhomogenen Koordinaten sind die lokalen Koordinaten der affinen Ebene:

$$x = (x_0, x_1, \dots, x_{d-1})^t; x_i \in \mathbb{K} \quad (1)$$

wobei \mathbb{K} den zugrundeliegenden Körper bezeichnet.

Die homogenen Koordinaten sind dagegen Koordinaten im höheren Einbettungskörper, die Ursprungsgeraden charakterisieren:

$$\hat{x} = (x_0, x_1, \dots, x_{d-1}, x_d)^t; x_i \in \mathbb{K} \quad (2)$$

Diejenigen Ursprungsgeraden, die die affine Hyperebene scheiden, sind genau die Punkte der affinen Ebene und können wie folgt in inhomogene Koordinaten umgerechnet werden:

$$x = \left(\frac{x_0}{x_d}, \frac{x_1}{x_d}, \dots, \frac{x_{d-1}}{x_d} \right)^t \quad (3)$$

Daraus sieht man schnell, dass diejenigen Ursprungsgeraden, deren letzte Komponente 0 ist, die affine Ebene nie schneiden und deshalb keine inhomogene Entsprechung haben. Diese stellen die „Punkte im Unendlichen“ der projektiven Geometrie dar.

Eine weitere Bemerkung hierzu ist, dass die Ursprungsgeraden, die die Punkte der Hyperebene repräsentieren folgender Äquivalenzrelation unterworfen sind:

$$\hat{a} \sim \hat{b} \Leftrightarrow \hat{a} = \lambda \hat{b}; \lambda \in \mathbb{K} \quad (4)$$

Es gilt also, dass also die Geraden beliebig skaliert werden können und dennoch den selben Punkt bezeichnen. Dies ist eine einfache geometrische Überlegung, da sich ja dadurch der Schnitt mit der affinen Ebene nicht verändert, sondern gleich bleibt. Die inhomogenen Koordinaten sind unter Skalierung im Einbettungsraum also invariant.

Wir haben gesehen, dass die Punkte im d -dimensionalen projektiven Raum die Ursprungsgeraden in einem $d + 1$ -dimensionalen Einbettungsraum sind. Analog dazu sind die Linien im projektiven Raum durch Ursprungsebenen im Einbettungsraum gegeben, die durch eine Ebenengleichung beschrieben werden können:

$$\sum_{i=0}^d a_i x_i = a_0 x_0 + a_1 x_1 + \dots + a_d x_d = 0; a_i \in \mathbb{K} \quad (5)$$

Wieder gilt die Skalierbarkeit:

$$\sum_{i=0}^d a_i x_i = 0 \Leftrightarrow \lambda \sum_{i=0}^d a_i x_i = 0; \forall \lambda \in \mathbb{K} \quad (6)$$

Daraus erhellt sich, dass die Anzahl der Linien und die Anzahl der Punkte dieselbe sein muss. Denn jedes Tupel (a_i) , das ja eine Ebene und damit eine projektive Linie definiert kann auch als projektiver Punkt aufgefasst werden und umgekehrt.

Die Ebenen können ebenfalls klassifiziert werden: Es gibt Ebenen, die die affine Hyperebene schneiden, was uns die Linien im projektiven Raum als Schnittgeraden gibt und eine Ebene, die im Einbettungsraum parallel zur affinen Ebene verläuft und sie nie schneidet. Diese wird dann als Gerade „im Unendlichen“ aufgefasst.

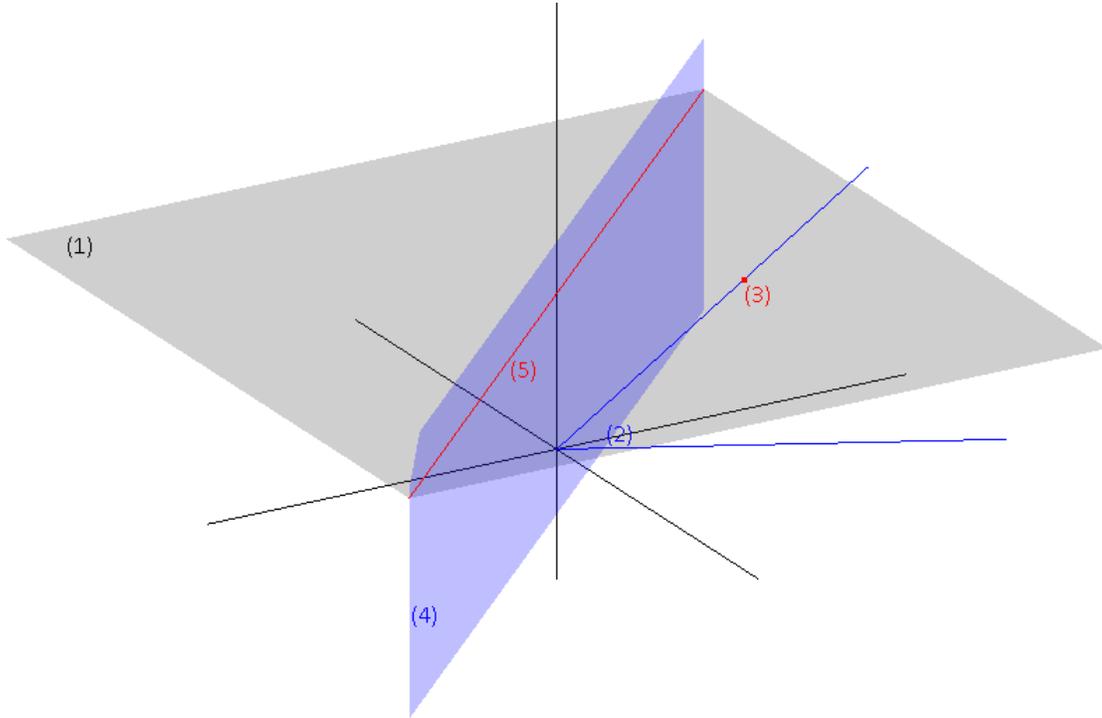


Abbildung 1: (1) Affine Hyperebene (2) Ursprungsgeraden (homogene Koordinaten) (3) Schnittpunkt mit der affinen Ebene (inhomogene Koordinaten) (4) Ursprungsebene (5) Schnittgerade mit der affinen Ebene.

2.2 Übergang zum finiten Körper

Die finite Projektive Geometrie entsteht einfach als projektive Geometrie über einem endlichen Körper. Ein endlicher oder finiter Körper ist ein Körper, der endlich viele Elemente hat. Hier wollen wir die Klasse endlicher Körper betrachten, die aus $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ hervorgehen. Als Körper sind sie natürlich abgeschlossen bezüglich Addition und Multiplikation und die Anzahl der Elemente beträgt p , wobei es sich nur um einen Körper handelt, wenn p eine Primzahl, oder eine Primzahlpotenz ist. Allerdings sollen hier der Einfachheit halber keine höheren Primzahlpotenzen als 1 betrachtet werden

$$\mathbb{F}_p = \{0, 1, \dots, p-1\} \quad (7)$$

Hier wollen wir zur einfacheren Rechnung eine Notation mit negativen Zahlen vorziehen:

$$\mathbb{K}_p = \left\{ -\frac{p-1}{2}, \dots, \frac{p-1}{2} \right\} \quad (8)$$

Die finite projektive Geometrie nennen wir \mathfrak{BK}_p^d , die sich folgendermaßen zerlegen lässt:

$$\mathfrak{BK}_p^d = \mathbb{K}_p^d \cup \mathbb{K}_p^{d-1} \cup \dots \cup \mathbb{K}_p^1 \cup \mathbb{K}_p^0 \quad (9)$$

Dies spiegelt wider, was oben bereits erwähnt wurde, dass nicht alle Geraden die affine Ebene schneiden und es somit Geraden und Punkte im Unendlichen gibt. Für den Fall $d = 2$ haben wir die affine Ebene \mathbb{K}_p^2 , eine Linie im Unendlichen \mathbb{K}_p und einen Punkt im Unendlichen \mathbb{K}_p^0 (Siehe Abb. 2).

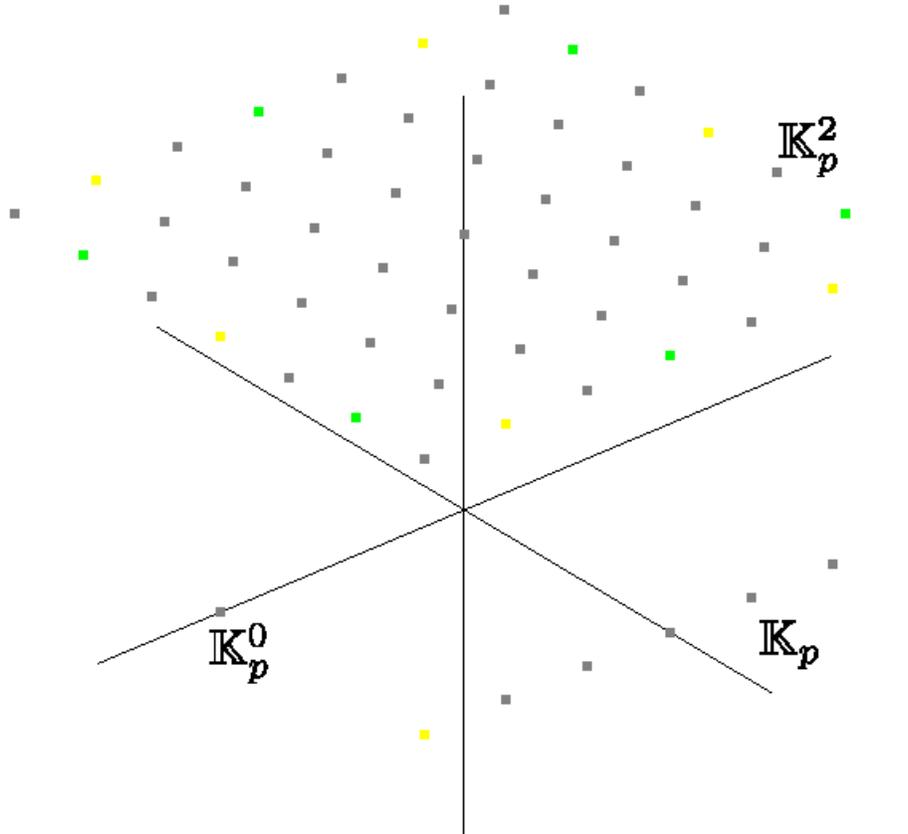


Abbildung 2: Die finite Projektive Geometrie für $p=7$ **gelb**: Quadratik Q^+ **grün**: Quadratik Q^-

2.3 Biquadrik als Nachbarschaftsrelation

Um eine Abstandsrelation analog zu einer Metrik einzuführen nutzt man Quadriken, Lösungsmengen quadratischer Formen. Quadratische Formen können durch eine Matrix beschrieben werden:

$$Q = \{\hat{x} \mid \hat{x}^t \hat{Q} \hat{x} = 0\} \quad (10)$$

Wir definieren die direkten Nachbarpunkte eines Punktes als die Punkte einer Quadratik in diesem Punkt. Wir haben also ein Quadrikfeld, das für jeden Punkt die Nachbarpunkte dieses Punktes definiert. Wir fordern dass die Quadratik symmetrisch sein soll und jeder Punkt soll Nachbar seines Nachbarn sein.

Da wir uns nicht im Reellen befinden, wo Quadriken typischerweise Kreise oder Ellipsen beschreiben, kann eine Quadrik „Lücken“ haben, d.h. nicht jede Linie, die durch den Mittelpunkt der Quadrik geht schneidet die Quadrik auch. Um dieses Problem zu lösen führen wir eine sogenannte Biquadrik ein:

$$Q^\pm = \{\hat{x} \mid \hat{x}^t \hat{Q}^+ \hat{x} = 0 \vee \hat{x}^t \hat{Q}^- \hat{x} = 0\} \quad (11)$$

Man kann die beiden Matrizen folgendermaßen wählen, damit in finiten Körpern jede Linie durch das Zentrum der Quadrik eine der beiden Quadriken genau zwei mal schneidet:

$$\hat{Q}^+ = \begin{pmatrix} \eta_0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad \hat{Q}^- = \begin{pmatrix} \eta_0 & 0 \\ 0 & -\lambda_0^2 \end{pmatrix}; \quad \eta_0 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (12)$$

Die Zahl $\lambda_0 \in \mathbb{K}$ ist hier so zu wählen, dass $-\lambda_0^2$ keine Quadratzahl ist. In nicht-finiten Körpern ohne i ist dies ja wegen dem negativen Vorzeichen sowieso immer der Fall. In finiten Körpern muss man unterscheiden zwischen sogenannten „3-mod-4“-Körpern und „1-mod-4“-Körpern.

Alle finiten Körper können nach der Primzahl, auf der sie basieren klassifiziert werden. Wenn man die entsprechende Primzahl modulo 4 nimmt, kommt immer 1 oder 3 heraus. Zum Beispiel ist $5 = 1 \pmod{4}$ und damit \mathbb{F}_5 ein „1-mod-4-Körper“. 11 ist $3 \pmod{4}$ und \mathbb{F}_{11} damit ein „3-mod-4-Körper“. Es gilt, dass die Zahl -1 bei 1-mod-4-Körpern selbst eine Quadratzahl ist und bei 3-mod-4-Körpern eben keine. Daraus ergibt sich natürlich, dass $-\lambda_0^2$ in 3-mod-4-Körpern auch keine Quadratzahl ist, die Forderung also erfüllt.

2.4 Projektivitäten und Translation

In der projektiven Geometrie gibt es eine zentrale invariante Größe, das sogenannte Doppelverhältnis. Dieses wird über das normal gebräuchliche Teilverhältnis definiert.

Das geometrische Teilverhältnis ist folgendermaßen definiert:

$$(A, B; S) := \lambda \text{ mit } \overrightarrow{AS} = \lambda \overrightarrow{SB} \quad (13)$$

Das Doppelverhältnis von vier Punkten wird definiert als das Verhältnis der Teilverhältnisse:

$$(A, B; S, T) := (A, B; S) : (A, B; T) \quad (14)$$

Eine spezielle Klasse von Abbildungen, die sogenannten Kollineationen, lassen kollineare Punkte kollinear, bilden also Geraden auf Geraden ab. Die sogenannten Projektivitäten auf der projektiven Geometrie sind Kollineationen, die ein invariantes Zentrum haben und somit die Punkte entlang sich im Zentrum schneidener Geraden abbilden (Siehe Abb. 3). Damit handelt es sich bei Projektivitäten um Zentralprojektionen und diese lassen die projektive Geometrie und damit insbesondere das Doppelverhältnis invariant.

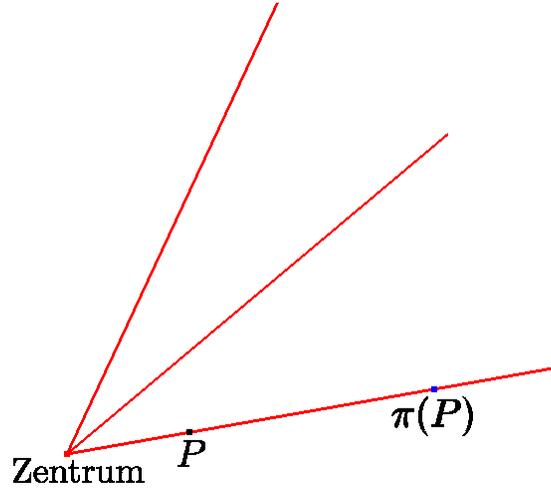


Abbildung 3: Wirkung einer Projektivität π auf einen Punkt P einer projektiven Geometrie.

Nach Veblen und Young [3] können Projektivitäten in Dimension > 2 als lineare Transformationen des Einbettungsraumes multipliziert mit einem beliebigen skalaren Vorfaktor geschrieben werden, formal ausgedrückt:

$$PGL(d, \mathbb{K}) = GL(d+1, \mathbb{K})/I(d+1, \mathbb{K}); \quad I(d+1, \mathbb{K}) = \{\lambda \hat{I}_{d+1} \mid \lambda \in \mathbb{K}\} \quad (15)$$

Wobei $PGL(d, \mathbb{K})$ die d -dimensionale Projektive lineare Gruppe über \mathbb{K} und $GL(d+1, \mathbb{K})$ die $d+1$ -dimensionale Lineare Gruppe über \mathbb{K} bezeichnet.

Nehmen wir nun die folgende allgemeine Form für Projektivitäten an:

$$\hat{P} = \begin{pmatrix} P & t \\ h^t & p_{dd} \end{pmatrix} \quad (16)$$

Insbesondere die Projektivitäten der Form

$$\hat{T}_t = \begin{pmatrix} t_d I & t \\ 0 & t_d \end{pmatrix}; \quad \hat{T}_t^{-1} = \hat{T}_{-t} \quad (17)$$

die wir Translation nennen, wirken als Translation auf der projektiven Hyperebene:

$$\hat{x} \oplus \hat{t} := \hat{T}_t \hat{x} = \begin{pmatrix} t_d x + x_d t \\ t_d x_d \end{pmatrix}; \quad \hat{x} \ominus \hat{t} := \hat{T}_{-t} \hat{x} = \begin{pmatrix} t_d x - x_d t \\ t_d x_d \end{pmatrix} \quad (18)$$

Analog dazu lassen sich auch Streckungen auf der projektiven Ebene definieren:

$$\hat{S}_\lambda = \begin{pmatrix} \lambda I & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad \hat{S}_\lambda^{-1} = \hat{S}_{\lambda^{-1}} \quad (19)$$

Mithilfe der Translation kann man auch eine Relation zur Verschiebung von Quadriken angeben:

$$(\hat{x} \oplus \hat{t})^t \hat{Q}(\hat{x} \oplus \hat{t}) = \hat{x}^t \hat{T}_{\hat{t}}^t \hat{Q} \hat{T}_{\hat{t}} \hat{x} \stackrel{!}{=} \hat{x}^t \hat{Q} \hat{x} \Rightarrow \hat{Q} := \hat{T}_{-\hat{t}}^t \hat{Q} \hat{T}_{-\hat{t}} \quad (20)$$

Das oben angesprochene Biquadrikfeld kann nun also für den kräftefreien Fall (an jedem Punkt dieselbe Quadrik) durch Translation an den jeweiligen Punkt direkt angegeben werden als:

$$\hat{Q}^\pm(\hat{x}) := \hat{T}_{-\hat{x}}^t \hat{Q}_0^\pm \hat{T}_{-\hat{x}} \quad (21)$$

3 Näherung für klassische Mechanik in \mathbb{Z}

Eine wichtige Eigenschaft der finiten Körper ist, dass sie zyklisch sind. Insbesondere wenn man über die größte positive Zahl $\frac{p-1}{2}$ hinausrechnet, „springt“ man wieder ans andere Ende des Körpers nach $-\frac{p-1}{2}$. Diese Sprünge sind der Grund, warum man in finiten Körpern zunächst keine Ordnung definieren kann. Die physikalische Interpretation dieser Zyklizität soll später Eichfreiheitsgrade im Rahmen dieser Theorie erzeugen.

Für die klassische Mechanik sind diese aber nicht von Interesse und das ist die Motivation dafür, den betrachteten Zahlenraum als \mathbb{Z} anzunähern. Voraussetzung dafür ist, dass man die Zahlen nicht zu groß wählt, damit in einem größeren finiten Körper $\pm\frac{p-1}{2}$ nicht überschritten wird, zumindest für Operation bis zur quadratischen Ordnung. Mit dieser Bedingung ergeben sich die Grenzen dieser Näherung zu:

$$\mathbb{Z}_{z_0} = \left\{ -z_0 = -\lfloor \sqrt{\frac{p-1}{2}} \rfloor, \dots, 0, \dots, z_0 = \lfloor \sqrt{\frac{p-1}{2}} \rfloor \right\} \quad (22)$$

Da man p beliebig hoch wählen kann, ist diese Näherung für alle z_0 valide. Der projektive Einbettungsraum ist dann ein $\mathbb{Z}_{z_0}^{d+1}$ und man definiert sich die Punkte auf der Hyperebene wieder durch die Schnittpunkte von Ursprungsgeraden in diesem Einbettungsraum. Analog zu Gleichung (9) kann man hier die Punkte, deren letzte Komponenten sind wieder als Ebenen, Geraden und Punkte im Unendlichen interpretieren. Im Gegensatz zum finiten Körper gibt es hier allerdings auch Geraden, die keine Nullkomponenten haben, die die affine Ebene aber dennoch nicht schneiden, da es sich bei \mathbb{Z} nicht um einen Körper sondern nur um einen Ring handelt und damit keine Inversen existieren.

Diese Geraden sollen aber explizit auch Teil der betrachteten Geometrie sein und liegen damit erstmal nur in homogenen Koordinaten vor. In diesen sind alle Rechnungen die hier gemacht werden sollen möglich und auch physikalisch sinnvoll. Es ergibt sich dadurch also physikalisch kein Problem. Um die entsprechenden Punkte aber dennoch auf der projektiven Hyperebene darstellen zu können, kann man sie mithilfe von Brüchen entsprechend skalieren um zu inhomogenen Koordinaten überzugehen. Die inhomogenen Koordinaten sind dann allerdings aus \mathbb{Q} und werden zwischen die \mathbb{Z} -Punkte eingebettet. Man fasst also die projektive Hyperebene als endliche Untermenge des \mathbb{Q}^d auf, die $\mathbb{Z}_{z_0}^d$ und die relevanten Bruchausdrücke enthält (siehe 4). (In der gezeigten Grafik wurden der Übersichtlichkeit halber nur Brüche mit kleinen Nennern zugelassen)

3.1 Form und Geschlossenheit der Biquadrik

Die Biquadrik soll hier für den Fall $d = 2$ diskutiert werden, da dieser besonders einfach dargestellt werden kann, für höhere Dimensionen (insbesondere $d = 4$) ist dies aber analog.

Die Quadrikkpunkte ergeben sich aus Gl. (12) mit $\lambda_0 = 1$ im Wesentlichen als Pythagoreische Tripel:

$$\begin{aligned} \hat{x}^t \hat{Q}^+ \hat{x} = 0 &\Leftrightarrow x_0^2 = x_1^2 + x_d^2 \\ \hat{x}^t \hat{Q}^- \hat{x} = 0 &\Leftrightarrow x_1^2 = x_0^2 + x_d^2 \end{aligned} \quad (23)$$

Auf die projektive Ebene abgebildet sind die Quadriken damit hyperbelförmig mit dem Lichtkegel als Asymptoten (vgl. Abb. 4). Man sieht auch, dass die beiden Quadriken genau mit den zeitartigen

(Q^+) und raumartigen (Q^-) Vektoren identifizierbar sind. Wir wollen im Folgenden alle auftauchenden Vektoren auf eine Länge skalieren, wodurch diese durch die Quadrik klassifiziert ist, so sollen zeitartige Vektoren mit einer Konstante γ_0 und raumartige Vektoren mit einer Konstante κ_0 skalieren, so z.B. Ortsvektoren und im Gegensatz dazu Kraftvektoren:

$$\hat{x} = \begin{pmatrix} x_0 \\ \vec{x} \\ \gamma_0 \end{pmatrix}; \quad \hat{k} = \begin{pmatrix} k_0 \\ \vec{k} \\ \kappa_0 \end{pmatrix} \quad (24)$$

Eine wichtige Voraussetzung für den Mechanismus zur Bewegung von Massenpunkten ist, dass die Biquadrik „geschlossen“ ist. Wobei geschlossen in diesem Kontext heißen soll, dass jede Gerade durch das Zentrum der Biquadrik diese in genau zwei Punkten schneidet. Dies gilt so rigoros nur in finiten Körpern. Damit die \mathbb{Z} -Näherung sinnvoll ist, muss diese Eigenschaft auch hier, zumindest näherungsweise gelten.

Da die Quadriken hyperbelförmig sind, gibt es schonmal zwei Geraden, die die Biquadrik auf keinen Fall in der Ebene schneiden, nämlich genau die Asymptoten der Hyperbeln. Diese sind aber für uns nicht relevant, da sie den Lichtkegel darstellen und es massebehafteten Teilchen somit verboten ist, sich auf diesen Geraden zu bewegen. Zudem muss das Teilchen physikalisch im zeitartigen Lichtkegel bleiben, damit müsste man nur die Geschlossenheit der positiven Quadrik fordern. Da die beiden Quadriken aber wesensgleich sind, muss man hier nicht zwischen ihnen unterscheiden. In Grafik 4 sieht man jedoch auch deutliche Lücken in der Quadrik, es existieren also durchaus Geraden, die die Biquadrik nicht schneiden. Wenn man das Modell für immer größere z_0 simuliert, stellt man aber fest, dass die Quadriken tatsächlich immer dichter werden, wie sich für $z_0 = 75$ in der Grafik schon deutlich zeigt. Für die Näherung reicht es aber, wenn die Eigenschaft der geschlossenen Biquadrik im Kontinuumslimites (d.h. $z_0 \rightarrow \infty$) gilt, was durch die Simulation stark untermauert wird.

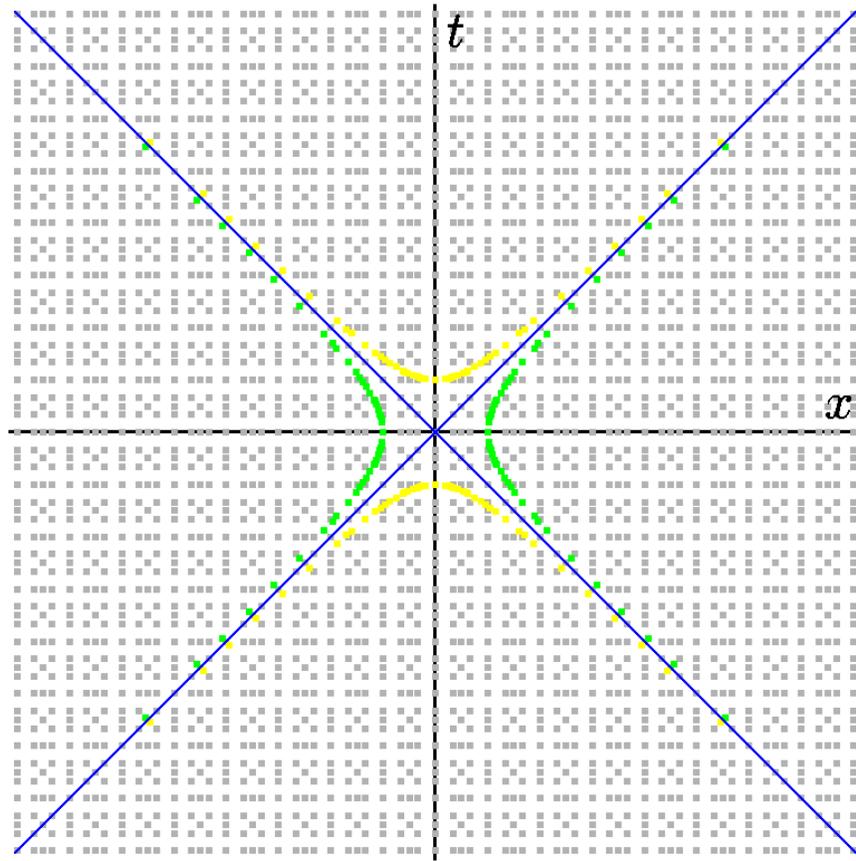


Abbildung 4: Simulation der \mathbb{Z} -Näherung für $z_0=75$; **gelb**: Quadrik Q^+ **grün**: Quadrik Q^- ; **blau**: Lichtkegel; $\lambda_0 = 1$; physikalisch interpretiert ist $x_0 = ct$ (mit $c = 1$ $x_0 = t$) und $x_1 = x$.

4 Dynamik von Massepunkten

Dieses Kapitel folgt im Wesentlichen der in [4] vorgeschlagenen Theorie der Dynamik.

In einem finiten Modell der klassischen Mechanik sind sowohl Raum, als auch Zeit aus dem verwendeten Körper und damit natürlich auch diskretisiert. Die projektive Hyperebene soll wie in der SRT als 4-dimensionale Raumzeit angenommen werden, deren nullte Komponente die Zeit ist. Die Komponenten in den vier Richtungen sollen durch die Eigenzeit τ parametrisiert werden. Damit ist die 5-dimensionale projektive Trajektorie eines Teilchens:

$$\hat{x}(\tau) = \begin{pmatrix} \mathbf{x}(\tau) \\ \gamma_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t(\tau) \\ \vec{x}(\tau) \\ \gamma_0 \end{pmatrix} \quad (25)$$

Für ein Voranschreiten der Eigenzeit $\tau \rightarrow \tau + 1$ springt das Teilchen $\hat{x}(\tau) \rightarrow \hat{x}(\tau + 1)$. Im Folgenden soll nun untersucht werden, welchen Gesetzmäßigkeiten dieser Sprungprozess unterliegt.

4.1 Kräftefreie Bewegung und Trägheit

Das erste Newtonsche Gesetz besagt, dass ein kräftefreier Körper entweder in Ruhe bleibt, oder sich geradlinig mit konstanter Geschwindigkeit bewegt. Dieses Konzept nennen wir Trägheit und es lässt sich auf der finiten projektiven Geometrie konsistent beschreiben.

Wie oben bereits erwähnt hat man in jedem Punkt eine Biquadrik (Biquadrikfeld). Für den kräftefreien Fall haben wir die Form dieses Biquadrikfeldes bereits in Gleichung 21 bestimmt. Die Idee ist nun, dass ein Teilchen im Punkt $\hat{x}(\tau)$ nur zu Punkten auf der Quadrik in diesem Punkt springen kann:

$$\hat{x}(\tau + 1) \in Q^\pm(\hat{x}(\tau)) \Leftrightarrow \hat{x}(\tau + 1)^t \hat{Q}^\pm(\hat{x}(\tau)) \hat{x}(\tau + 1) \Leftrightarrow \hat{x}(\tau + 1)^t \hat{T}_{-\hat{x}(\tau)}^\pm \hat{Q}_0^\pm \hat{T}_{-\hat{x}(\tau)} \hat{x}(\tau + 1) \quad (26)$$

Diese Bedingung legt $\hat{x}(\tau + 1)$ aber noch nicht eindeutig fest. Dies erreicht man, indem man fordert, dass $\hat{x}(\tau - 1)$ und $\hat{x}(\tau + 1)$ auf einer Gerade durch das Zentrum der Quadrik liegen müssen.

Wir führen für jeden Punkt $\hat{x}(\tau)$ zwei Geschwindigkeiten als Differenzen zu den beiden Nachbarpunkten auf der Trajektorie ein:

$$\begin{aligned} \hat{u}^- &= \hat{x}(\tau - 1) \ominus \hat{x}(\tau) \\ \hat{u}^+ &= \hat{x}(\tau + 1) \ominus \hat{x}(\tau) \end{aligned} \quad (27)$$

Der allgemeine Geschwindigkeitsvektor ist zeitartig und hat die Form:

$$\hat{u}(\tau) := \hat{u}^+ = \begin{pmatrix} \mathbf{u}(\tau) \\ \gamma_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma(\tau) \\ \gamma(\tau) \vec{v}(\tau) \\ \gamma_0 \end{pmatrix} \quad (28)$$

Zur Berechnung des nächsten Punktes ist \hat{u}^- bereits bekannt und \hat{u}^+ zu bestimmen. Das Zentrum der Quadrik ist im kräftefreien Fall $\hat{x}(\tau)$. Wenn die beiden Nachbarpunkte auf einer Geraden durch $\hat{x}(\tau)$

liegen sollen muss gelten:

$$\hat{x}(\tau \pm 1) = \underbrace{\hat{S}_{\lambda_{\pm}}}_{\hat{u}^{\pm}} \hat{u}^{\pm} \oplus \hat{x}(\tau) = \hat{T}_{\hat{x}(\tau)} \hat{u}^{\pm} \quad (29)$$

Durch einsetzen in Gl. (26) erhält man:

$$(\hat{T}_{\hat{x}(\tau)} \hat{u}^{\pm})^t \hat{T}_{-\hat{x}(\tau)}^t \hat{Q}_0^{\pm} \hat{T}_{-\hat{x}(\tau)} (\hat{T}_{\hat{x}(\tau)} \hat{u}^{\pm}) = (\hat{u}^{\pm})^t (\hat{T}_{-\hat{x}(\tau)} \hat{T}_{\hat{x}(\tau)})^t \hat{Q}_0^{\pm} (\hat{T}_{-\hat{x}(\tau)} \hat{T}_{\hat{x}(\tau)}) \hat{u}^{\pm} = (\hat{u}^{\pm})^t \hat{Q}_0^{\pm} \hat{u}^{\pm} = 0 \quad (30)$$

Die Forderung an die Geschwindigkeiten ist also, dass sie auf der nicht-verschobenen Nullquadrik liegen müssen. Bei gegebenem \hat{u}^- erhält man so eine quadratische Gleichung in λ_{\pm} und kann so leicht \hat{u}^+ bestimmen:

$$(\hat{u}^-)^t (\hat{S}_{\lambda_{\pm}})^t \hat{Q}_0^{\pm} \hat{S}_{\lambda_{\pm}} \hat{u}^- = 0 \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} Q^+ : \lambda_{\pm}^2 (|\vec{u}|^2 - u_o^2) + u_d^2 = 0 \\ Q^- : (|\vec{u}|^2 - u_o^2) - \lambda_0^2 u_d^2 = 0 \end{array} \right\} \quad (31)$$

\hat{u}^- muss bereits auf der Quadrik liegen, da in jedem Punkt dieselbe lokale Quadrik ist und $\hat{x}(\tau)$ ja bereits Nachbarpunkt von $\hat{x}(\tau - 1)$ gewesen sein muss. Damit muss $\lambda_- = 1$ eine Lösung sein und da die Lösungen symmetrisch sind ist $\lambda_+ = -1$ und damit $\hat{u}^+ = \hat{S}_{-1} \hat{u}^-$. Damit sind die beiden Geschwindigkeiten betragsmäßig gleich. Wir finden also tatsächlich: Ein kräftefreies Teilchen bewegt sich auf einer Geraden mit konstanter Geschwindigkeit (vgl. Abb. 5a).

4.2 Das projektive Kraftfeld

Wir führen den Vektor des projektiven Kraftfeldes folgendermaßen ein:

$$\hat{k} = \begin{pmatrix} \mathbf{k}(\hat{x}) \\ \kappa_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma k_0 \\ \gamma \vec{k}(\hat{x}) \\ \kappa_0 \end{pmatrix} \quad (32)$$

Wobei $\vec{k}(\hat{x})$ ein vorgegebenes dreidimensionales Kraftfeld beschreibt. In der kontinuierlichen speziellen Relativitätstheorie gilt immer:

$$\mathbf{k} \eta_0 \mathbf{u} = 0 \Leftrightarrow \gamma^2 (\vec{k} \cdot \vec{v} - k_0) = 0 \Leftrightarrow k_0 = \vec{k} \cdot \vec{v} \quad (33)$$

Man erhält so:

$$\mathbf{k} = \gamma \begin{pmatrix} \vec{k} \cdot \vec{v} \\ \vec{k} \end{pmatrix} = \gamma \begin{pmatrix} W \\ \vec{k} \end{pmatrix} \quad (34)$$

mit $W = \vec{k} \cdot \vec{v}$ der mechanischen Leistung. Weiterhin bekannt ist die folgende Relation für das Potential $V(\mathbf{x})$:

$$\frac{dV(\mathbf{x}(\tau))}{d\tau} = -\vec{k}(\mathbf{x}) \cdot \vec{v}(\mathbf{x}(\tau)) \gamma = -W \gamma = -k_0 \quad (35)$$

Dieses gilt im bekannten Kontinuum. Geht man nun zum Finiten über, wird die Ableitung von $V(\mathbf{x})$ diskretisiert zu:

$$\frac{dV(\mathbf{x}(\tau))}{d\tau} \rightarrow \Delta V(\mathbf{x}) = \frac{V(\mathbf{x}(\tau + 1)) - V(\mathbf{x}(\tau))}{\tau + 1 - \tau} = V(\mathbf{x}(\tau + 1)) - V(\mathbf{x}(\tau)) = -k_0 \quad (36)$$

Die Veränderung des Potentials ist also durch die nullte Komponente der Kraft gegeben. Nach dem zweiten newtonschen Gesetz definiert man mit dem Kraftvektor dann die Beschleunigung folgendermaßen:

$$\hat{a}(\hat{x}(\tau)) = \hat{S}_{\lambda_0} \hat{k}(\hat{x}(\tau)) = \begin{pmatrix} \lambda_0 \mathbf{k} \\ \kappa_0 \end{pmatrix} \quad (37)$$

Damit nimmt λ_0 die Rolle einer inversen Masse ein, skaliert mit γ_0 :

$$\lambda_0 = \frac{\gamma_0}{m_0} \quad (38)$$

Die genaue Bedeutung dieser Gleichung wird noch klarer, wenn wir den kanonischen Impuls und damit die Masse m_0 diskutieren.

4.3 Bewegung im Kraftfeld

Die Grundidee hier ist, dass Kräfte wirken, indem das Biquadrikfeld in jedem Punkt verzerrt wird. So ist nun die Quadrik im Punkt $\hat{x}(\tau)$ nicht mehr die nach $\hat{x}(\tau)$ verschobene Quadrik, sondern zusätzlich um den Beschleunigungsvektor verschoben. Man betrachtet also die Quadrik im Punkt $\hat{x}(\tau) \oplus \hat{a}(\hat{x}(\tau))$

$$\hat{Q}^\pm(\hat{x}(\tau)) = \hat{T}_{-\hat{x}(\tau)}^t \hat{T}_{-\hat{a}(\hat{x}(\tau))}^t \hat{Q}_0^\pm \hat{T}_{-\hat{a}(\hat{x}(\tau))} \hat{T}_{-\hat{x}(\tau)} \quad (39)$$

Die Trägheit wirkt aber natürlich weiterhin und damit auch die Bedingung, dass $\hat{x}(\tau - 1)$ und $\hat{x}(\tau + 1)$ auf einer Geraden durch das Zentrum der Quadrik liegen müssen. Das Zentrum der Quadrik ist nun aber nach $\hat{x}(\tau) \oplus \hat{a}(\hat{x}(\tau))$ verschoben. Damit kann $\hat{x}(\tau + 1)$ als Schnittpunkt der Gerade durch $\hat{x}(\tau - 1)$ und $\hat{x}(\tau) \oplus \hat{a}(\hat{x}(\tau))$ mit der Quadrik konstruiert werden (Siehe Abb. 5b).

Diese Gerade ist von der Form:

$$\hat{g}(\lambda) = \hat{T}_{\hat{a}(\hat{x}(\tau))} \hat{T}_{\hat{x}(\tau)} \hat{S}_\lambda [\hat{x}(\tau) \oplus \hat{a}(\hat{x}(\tau)) \ominus \hat{x}(\tau - 1)] \quad (40)$$

Eingesetzt in die Quadrik heben sich die Translationsoperatoren auf und man erhält:

$$[\hat{x}(\tau) \oplus \hat{a}(\hat{x}(\tau)) \ominus \hat{x}(\tau - 1)]^t \hat{S}_\lambda^t \hat{Q}_0^\pm \hat{S}_\lambda [\hat{x}(\tau) \oplus \hat{a}(\hat{x}(\tau)) \ominus \hat{x}(\tau - 1)] = 0 \quad (41)$$

was wiederum eine quadratische Gleichung in λ erzeugt, die genau zwei Lösungen hat, wenn die Biquadrik geschlossen ist. Eine elegantere Formulierung ergibt sich in der Sprache der kräftefreien Bewegung, indem man wieder zwei Geschwindigkeiten wie in Gl. (27) einführt. Nach Gl. (41) soll ja für beide Nachbarpunkte gelten:

$$[\hat{x}(\tau \pm 1) \ominus \hat{x}(\tau) \ominus \hat{a}(\hat{x}(\tau))]^t \hat{Q}_0^\pm [\hat{x}(\tau \pm 1) \ominus \hat{x}(\tau) \ominus \hat{a}(\hat{x}(\tau))] = 0 \quad (42)$$

und mit den eingeführten Geschwindigkeiten erhält man schnell:

$$[\hat{u}^\pm \ominus \hat{a}(\hat{x}(\tau))]^t \hat{Q}_0^\pm [\hat{u}^\pm \ominus \hat{a}(\hat{x}(\tau))] = 0 \Leftrightarrow (\hat{u}^\pm)^t \hat{T}_{-\hat{a}(\hat{x}(\tau))}^t \hat{Q}_0^\pm \hat{T}_{-\hat{a}(\hat{x}(\tau))} \hat{u}^\pm = 0 \quad (43)$$

Allerdings sind jetzt \hat{u}^\pm nicht mehr kollinear wie im kräftefreien Fall, sondern weisen einen Knick auf, das Teilchen ändert also seine Geschwindigkeit. Die Nebenbedingung ist dann aber, dass $\hat{u}^\pm \ominus \hat{a}(\hat{x}(\tau))$ kollinear sind:

$$\hat{u}^- \ominus \hat{a} = \ominus[\hat{u}^+ \ominus \hat{a}] \Leftrightarrow \hat{u}^- \ominus \hat{a} = \ominus\hat{u}^+ \oplus \hat{a} \Leftrightarrow \hat{u}^- = \hat{a} \oplus \hat{a} \ominus \hat{u}^+ \quad (44)$$

Damit kann die Richtungsänderung der Bewegung geschrieben werden als:

$$\hat{u}^+ \oplus \hat{u}^- = \hat{a} \oplus \hat{a} \Leftrightarrow \kappa_0(\mathbf{u}^+ + \mathbf{u}^-) = 2\mathbf{a}\gamma_0 \quad (45)$$

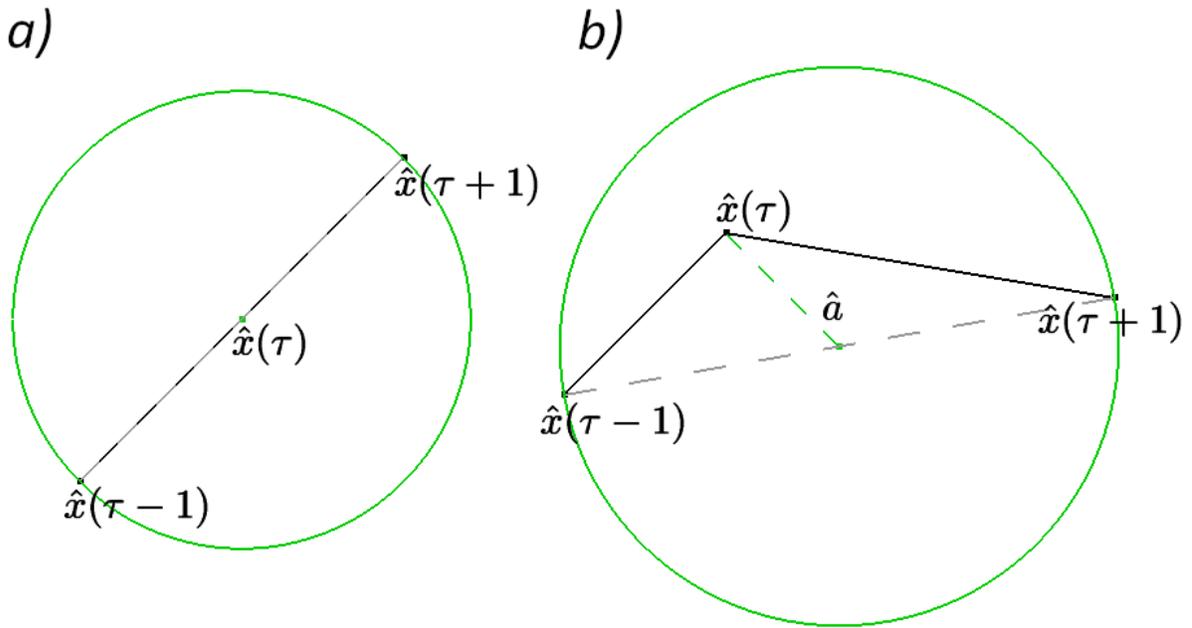


Abbildung 5: a) Lineare Bewegung in Abwesenheit von Kraft b) Änderung der Bewegungsrichtung bei Krafteinwirkung.

5 Legendretransformation und Phasenraum

5.1 Harmonische Teilung und Polare

Hier soll nun mit den bisher erarbeiteten Informationen eine geometrische Dualität hergeleitet werden, die wir später mit der Legendretransformation indentifizieren können. Dabei folgen wir im wesentlichen einem Artikel von R.C. Pappas [5].

Als erstes soll aufgezeigt werden, wie man eine projektive Gerade sinnvoll parametrisieren kann. Aus der normalen Geometrie ist bekannt, dass eine Gerade zwischen einem Punkt \vec{u} und einem Punkt \vec{v} wie folgt parametrisiert werden kann:

$$\vec{g}(\lambda) = \vec{g}(\lambda) + \lambda(\vec{v} - \vec{u}); \quad \vec{g}(\lambda = 0) = \vec{u}; \quad \vec{g}(\lambda = 1) = \vec{v} \quad (46)$$

Wie bereits erwähnt entspricht eine projektive Gerade einer Ursprungsebene im Einbettungsraum:

$$\hat{g}(\kappa, \mu) = \mu\hat{u} + \kappa\hat{v} \quad (47)$$

Nun entspricht aber jedes Vielfache eines Vektors im Einbettungsraum demselben Vektor auf der projektiven Ebene, d.h. man kann μ herausteilen. Definiert man $\lambda := \frac{\kappa}{\mu}$ kann eine Gerade parametrisiert werden als:

$$\hat{g}(\lambda) = \hat{u} + \lambda\hat{v} \quad (48)$$

Der einzige Punkt, der durch die Parametrisierung nicht erreicht werden kann ist \hat{v} selbst, wählt man diesen jedoch als Fernpunkt ist das kein Problem, so können alle Punkte der Gerade, die in der projektiven Ebene liegen parametrisiert werden.

Betrachtet man nun die Norm einer solchen Gerade erhält man eine quadratische Gleichung in λ :

$$\hat{g}(\lambda) \cdot \hat{g}(\lambda) = \hat{g}(\lambda)^t \hat{g}(\lambda) = (\hat{u} + \lambda\hat{v})^t (\hat{u} + \lambda\hat{v}) = \lambda^2 \hat{v}^t \hat{v} + 2\lambda \hat{u}^t \hat{v} + \hat{u}^t \hat{u} = 0 \quad (49)$$

Diese hat im Allgemeinen zwei Lösungen λ_{\pm} und damit gibt es zwei Schnittpunkte mit der Quadrik $\hat{p}_{\pm} = \hat{u} + \lambda_{\pm} \hat{v}$

Nun kann man das Doppelverhältnis der vier Punkte ausrechnen und findet:

$$(\hat{u}, \hat{v}; \hat{p}_+, \hat{p}_-) = \frac{(\hat{u}, \hat{v}; \hat{p}_+)}{(\hat{u}, \hat{v}; \hat{p}_-)} = \frac{\lambda_+}{\lambda_-} \quad (50)$$

Man spricht von einer harmonischen Teilung der Gerade durch die beiden Schnittpunkte, wenn das Doppelverhältnis den Wert -1 hat, damit:

$$(\hat{u}, \hat{v}; \hat{p}_+, \hat{p}_-) = \frac{\lambda_+}{\lambda_-} = -1 \Leftrightarrow \lambda_+ + \lambda_- = 0 \Leftrightarrow \hat{u} \cdot \hat{v} = 0 \quad (51)$$

Definition:

Zwei Punkte \hat{u} , \hat{v} seien zueinander dual, wenn sie von ihren beiden Schnittpunkten harmonisch geteilt werden. Dies ist der Fall, wenn gilt: $\hat{u}^t \hat{v} = 0$.

Für einen Punkt \hat{v} sind alle \hat{u} , die diese Gleichung erfüllen also dual. Die Gleichung beschreibt für

festes \hat{v} eine Hyperebene. Für alle Punkte \hat{x} existiert also eine duale Hyperebene, die durch die Quadrik bestimmt ist. Diese Hyperebene nennen wir Polare von \hat{v} :

$$\text{pol}(\hat{v}) = \{\hat{x} \mid \hat{x}^t \cdot \hat{v} = 0\} \quad (52)$$

Ist nun der Punkt \hat{v} ein Quadrikkpunkt, dann lässt sich ein ausgezeichneter dualer Vektor aus dem Pol von \hat{v} berechnen als:

$$\tilde{v} = \hat{Q}\hat{v} \quad (53)$$

Denn dann gilt ja bereits:

$$\hat{v} \cdot \tilde{v} = \hat{v}^t \hat{Q}\hat{v} = 0 \quad (54)$$

Diese Dualität soll nun noch von anderer Seite her beleuchtet werden. In der projektiven Geometrie gibt es aufgrund der Axiome eine grundlegende Dualität zwischen Punkten und Geraden [1], was bedeutet dass die Geometrie invariant ist, wenn man die Rollen von Punkten und Geraden vertauscht. Dies kann man leicht an den Axiomen P1 und P2 in Kapitel 2.1 sehen, sowie aus dem bereits erwähnten Prinzip, dass jeder Punkt eine Hyperebene und damit eine projektive Gerade durch Orthogonalität definiert. Um diesem Prinzip auch Ausdruck zu verleihen interpretieren wir Gleichung (53) neu. Demnach würde das Dual von \hat{v} eine duale Gerade sein. Dies ist gegeben, wenn wir \tilde{v} als Zeilenvektor interpretieren, der der Normalenvektor der dualen Hyperebene und damit der dualen Gerade ist (siehe Abb. 6). Dies ist auch konsistent mit der klassischen kontinuierlichen Mechanik, in der die dualen Vektoren ja auch Vektoren aus dem Raum der linearen Funktionale, der Zeilenvektoren sind, allerdings ist hier die Dualität eben über die Quadrik definiert.

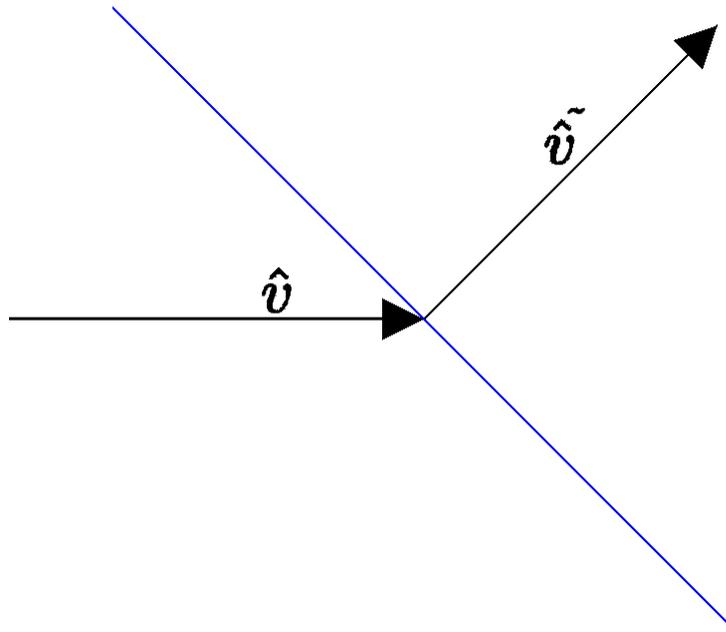


Abbildung 6: \hat{v} und sein dualer Vektor, blau: die entsprechende duale Gerade.

5.2 Kanonischer Impuls und Legendretransformation

In der Hamiltonmechanik wird der kanonische Impuls als dual zur Geschwindigkeit durch die Ableitung definiert:

$$\mathbf{p} = \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{x}}} \quad (55)$$

Damit lässt sich die Legendretransformation und damit der Zusammenhang zwischen der Hamilton- und der Lagrangefunktion herstellen:

$$H = \vec{p} \cdot \dot{\vec{x}} - L \quad (56)$$

Die Lagrangefunktion ist dann in der SRT gegeben als:

$$L = -m_{\text{ruhe}}\gamma^{-1} \quad (57)$$

Analog dazu lässt sich dieser Sachverhalt mit der geometrischen Dualität definieren. Man definiert damit den kanonischen Impuls als dual zur Geschwindigkeit:

$$\hat{p} = \hat{Q}\hat{u} \quad (58)$$

Damit gilt nämlich automatisch im kräftefreien Fall:

$$\hat{p} \cdot \hat{u} = \hat{u}^t \hat{Q}_0 \hat{u} \quad (59)$$

Da für eine freie Bewegung die Geschwindigkeit in jedem Punkt immer Quadriktupunkt der unverschobenen Quadrik ist.

Wenn Kräfte präsent sind, gilt dies nicht mehr, da nun die Geschwindigkeit nicht mehr Quadriktupunkt ist. In diesem Fall ist $\hat{u} \ominus \hat{a}$ Quadriktupunkt und damit gilt:

$$\hat{p} = \hat{T}_{-\hat{a}}^t \hat{Q}_0 \hat{T}_{-\hat{a}} \hat{u} \Rightarrow \hat{p} \cdot \hat{u} = (\hat{u} \ominus \hat{a})^t \hat{Q}_0 (\hat{u} \ominus \hat{a}) = 0 \quad (60)$$

Nehmen wir im folgenden den Viererimpuls und die Vierergeschwindigkeit wie in der SRT üblich an:

$$\mathbf{p} = \begin{pmatrix} H \\ \vec{p} \end{pmatrix}, \quad \hat{p} = \begin{pmatrix} \mathbf{p} \\ p_d \end{pmatrix}; \quad \mathbf{u} = \begin{pmatrix} \gamma \\ \gamma \vec{v} \end{pmatrix}, \quad \hat{u} = \begin{pmatrix} \mathbf{u} \\ \gamma_0 \end{pmatrix} \quad (61)$$

Mit der Forderung, dass \hat{p} Quadriktupunkt ist, erhält man die relativistische Energie-Impuls-Relation:

$$-H^2 + |\vec{p}|^2 + p_d^2 = 0 \Leftrightarrow H^2 - |\vec{p}|^2 = p_d^2 \quad (62)$$

Daraus wird ersichtlich, dass p_d die Rolle der Masse $p_d = m_0$ einnehmen muss. Damit ergibt sich eine analoge Form der Legendretransformation:

$$\begin{aligned} \hat{p} \cdot \hat{u} &= H\gamma + \gamma \vec{p} \cdot \vec{v} + m_0\gamma_0 = 0 \\ \Leftrightarrow -H &= \vec{p} \cdot \vec{v} + \frac{m_0\gamma_0}{\gamma} \end{aligned} \quad (63)$$

Dadurch wird die Lagrangefunktion definiert als:

$$L = -\frac{m_0\gamma_0}{\gamma} \quad (64)$$

Dies ist die physikalisch sinnvolle Definition wie in der SRT, nur skaliert hier die Lagrangefunktion noch mit γ_0 . Dies führt dazu, für alle Berechnungen einen „effektiven“ Gammafaktor $\gamma_{\text{eff}} = \frac{\gamma}{\gamma_0}$. Mit diesem Impuls lässt sich ein Phasenraum aus \hat{x} und \hat{p} definieren, der die Beziehung zwischen den Achsen durch Gleichung (58) herstellt.

6 Anwendung: Der harmonische Oszillator

Ein harmonischer Oszillator ist beschrieben durch eine Kraft, die der Auslenkung des Systems entgegenwirkt. Die Stärke dieser Rückstellkraft soll im folgenden durch einen Faktor α charakterisiert werden:

$$\vec{k} = -\alpha \vec{x} \quad (65)$$

Mit Gl. (34) ergibt sich:

$$\mathbf{k} = -\gamma\alpha \begin{pmatrix} \vec{x} \cdot \vec{v} \\ \vec{x} \end{pmatrix} \quad (66)$$

Mit Gleichung (37) ist dann die Viererbeschleunigung:

$$\mathbf{a} = -\gamma\lambda_0\alpha \begin{pmatrix} \vec{x} \cdot \vec{v} \\ \vec{x} \end{pmatrix} \quad (67)$$

6.1 Trajektorie in Orts- und Phasenraum

Im Folgenden soll das hier vorgestellte System des harmonischen Oszillators für den eindimensionalen Fall simuliert und mit den bekannten Ergebnissen aus dem kontinuierlichen Modell verglichen werden. Die Parameter des Systems sind hierbei die Systemgröße γ_0 und κ_0 , die inverse Masse λ_0 , die Stärke der Rückstellkraft α und die Auslenkung am Nullpunkt x_0 . Es soll zunächst $\gamma_0 = \kappa_0$ sein.

Ein Problem des Modells ist, dass der Zeitschritt immer nur +1 und niemals kleiner ist. Desweiteren wird in jedem Schritt ja zu einem Quadrikkpunkt gesprungen, der in der Größenordnung γ_0 vom vorherigen Punkt entfernt ist. Damit ist das System mit einem Kraft-Vorfaktor von 1 sehr schlecht aufgelöst, zudem variiert die Sprungweite am Anfang, es zeigt sich ein nicht-physikalisches Verhalten (Siehe Abb. 7). Dies ändert sich nicht, wenn man die Systemgröße erhöht.

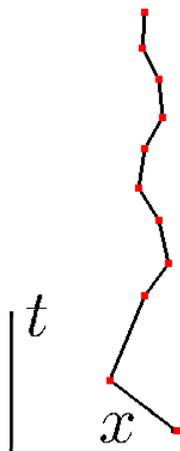


Abbildung 7: Harmonischer Oszillator für $\gamma_0 = \kappa_0 = 50$; $\lambda_0 = 1$; $\alpha = 1$; $x_0 = 40$.

Will man also die Schwingung besser auflösen, die Zeitaufösung kann aber nicht kleiner als 1 werden, muss die Frequenz kleiner werden. Unter der Annahme, dass der Vorfaktor der Kraft mit der Frequenz korreliert, muss der Vorfaktor also bruchwertig werden. Da die inverse Masse mit m_0 und γ_0 zusammenhängt kann diese nicht kleiner als 1 werden, also muss man α als Bruch < 1 wählen. Mit dieser Konfiguration lässt sich tatsächlich ein Verlauf erzeugen, der der erwarteten Sinusschwingung nahe kommt (Abb. 8).

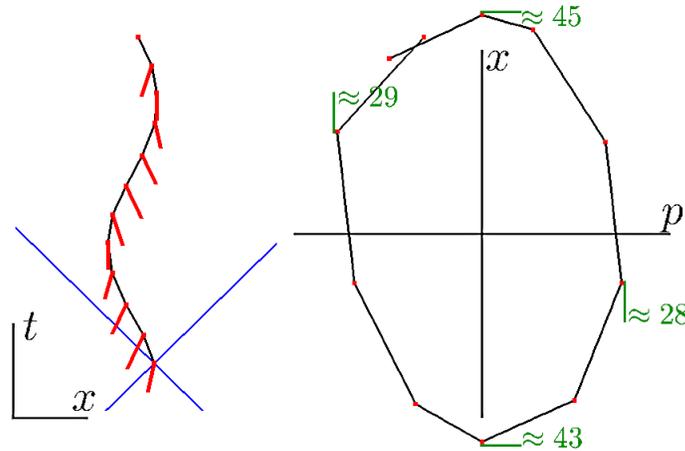


Abbildung 8: Harmonischer Oszillator für $\gamma_0 = \kappa_0 = 50$; $\lambda_0 = 1$; $\alpha = \frac{1}{5}$; $x_0 = 40$ links: Ortsraum in rot: Impulsvektoren, rechts: Phasenraum in grün: Absolute Maximalwerte in Raum- und Impulsrichtung

In Abb. 8 ist desweiteren auch der Phasenraumverlauf aufgetragen, der auch wie erwartet ovalförmig ist. An den eingezeichneten Maximalwerten der Ortskoordinaten sieht man allerdings das Phänomen, dass die Amplitude der Schwingung mit der Zeit zunimmt. Die Startauslenkung ist 40 und nach einer Schwingungsperiode ist die Amplitude bereits 45. Die Amplitude würde also mit der Zeit größer, was der Energieerhaltung widerspricht.

Wenn man zu höheren Systemgrößen und damit auch zu längeren Trajektorien geht, zeigt sich, dass sich nach einem relativ chaotischen Einschwingvorgang tatsächlich eine stabile Schwingung mit konstanter Amplitude ergibt (Abb. 9). Es scheint so, als ob das System eine präferierte Amplitude anstrebt, hier 140. Stellt man diese als x_0 ein, so erhält man eine Trajektorie, die von Anfang an annähernd ovalförmig ist, allerdings ist hier die stabile Amplitude ebenfalls höher als die Startauslenkung.

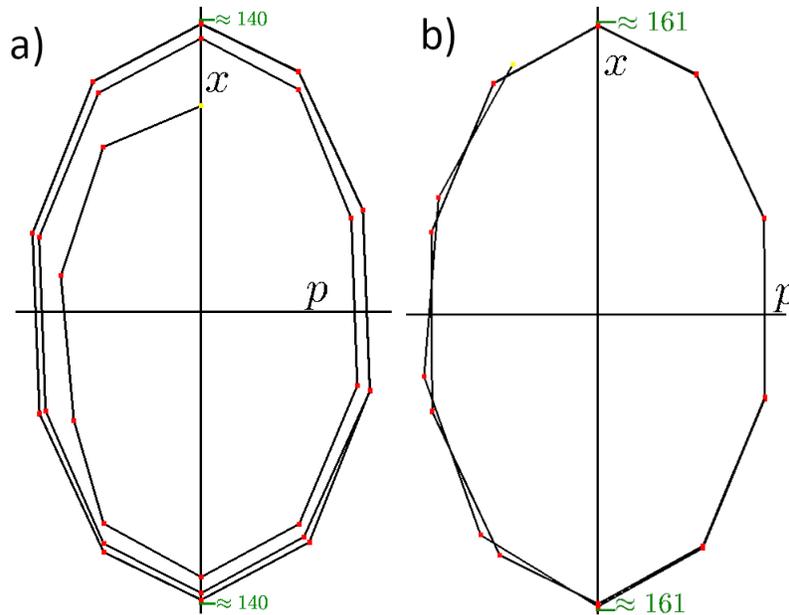


Abbildung 9: Harmonischer Oszillator Phasenraum für $\gamma_0 = \kappa_0 = 1000$; $\lambda_0 = 1$; $\alpha = \frac{1}{5}$; a) $x_0 = 100$, ab dem 28. Punkt wird die Trajektorie stabil mit Amplitude 140 b) $x_0 = 140$, die stabile Amplitude ist dann 161.

6.2 Energie und Potential

Dies ist insbesondere relevant, da das System damit augenscheinlich die Energieerhaltung verletzt. Die Energie und das Potential lassen sich wie bereits erläutert als nullte Komponente von Impuls- und Kraftvektor ablesen und ihr Verlauf soll nun untersucht werden.

Mit $E = T + V$ kann so aus $E = p_0$ und $V = k_0$ auch die kinetische Energie berechnet werden. Es soll hier angemerkt sein, dass die nullte Komponente aus Gleichung (36) eine Differenz des Potentials ist. Damit ist das Potential also nur bis auf einen Versatz bestimmt, was ja aber bei Energien sowieso üblich ist. Dieses Energiespektrum ist in Abb. 10 dargestellt. Es sei hier erwähnt, dass sich $E(\tau)$ und damit auch $T(\tau)$ sehr weit im negativen Bereich befinden und diese deshalb in der Abbildung um 1000 nach oben verschoben dargestellt werden. Es scheint desweiteren so, als ob diese Verschiebung im Allgemeinen gleich γ_0 ist.

Die Energie oszilliert in diesem Modell, während sie im klassischen, kontinuierlichen Fall konstant ist. Das Modell bricht also an dieser Stelle die Energieerhaltung, was auch der tiefere Grund dafür ist, dass sich die Amplitude über die Anfangsauslenkung hinaussteigt, wie oben hervorgehoben.

In der Abbildung sieht man schön, dass $V(\tau)$ immer dann maximal ist, wenn die Auslenkung maximal/minimal ist und immer dann minimal, wenn die Auslenkung 0 ist, wir haben hier also die Bestätigung, dass sich die nullte Komponente der Kraft tatsächlich wie das entsprechende quadratische Potential verhält. Auch ist die kinetische Energie $T(\tau)$ immer dann maximal, wenn die Geschwindigkeit maximal/minimal ist und analog minimal, wenn die Geschwindigkeit 0 ist, verhält sich also ebenfalls so, wie man es von der kinetischen Energie erwarten würde. Eine weitere interessante Betrachtung ist, ob diese Kurven auch der theoretischen Vorhersage folgen.

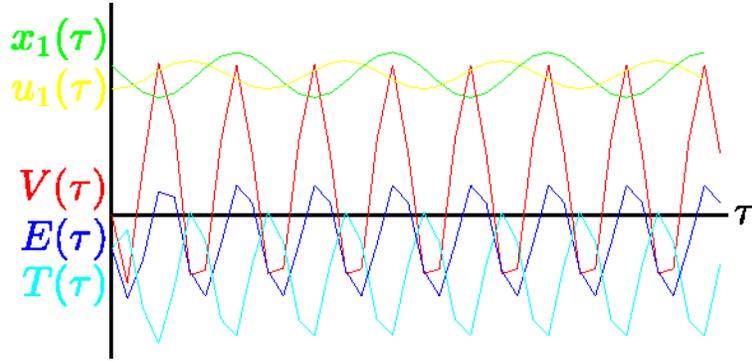


Abbildung 10: Energiespektrum des Oszillators über die Zeit und über die Auslenkung und Geschwindigkeit des Systems bei $\gamma_0 = \kappa_0 = 1000$; $\lambda_0 = 1$; $\alpha = \frac{1}{5}$ und $x_0 = 140$.

Aus der kontinuierlichen Theorie findet man folgende Gleichung für das theoretische harmonische Potential:

$$\vec{k}(\tau) = -\alpha \vec{x}(\tau) \Leftrightarrow V^{\text{theo}}(\tau) = \frac{1}{2} \alpha |\vec{x}(\tau)|^2 \quad (68)$$

Die kinetische Energie ist aber relativistisch nicht mehr durch $\frac{1}{2} m_0 v^2$ gegeben sondern durch (mit $c = 1$):

$$T^{\text{theo}}(\tau) = \left(\frac{\gamma}{\gamma_0} - 1 \right) m_0 \quad (69)$$

Die theoretischen Kurven folgen schon annähernd der Form der simulierten Werte, aber die absoluten Werte sind dennoch verschieden. Durch Verschiebung und Skalierung kann man doch eine relativ gute Annäherung erreichen (siehe Abb. 11). Man findet:

$$\begin{aligned} V_{fit}^{\text{theo}}(\tau) &= \frac{V^{\text{theo}}(\tau)}{161} - 5.65, \\ T_{fit}^{\text{theo}}(\tau) &= 2T^{\text{theo}}(\tau) - 10.2 \end{aligned} \quad (70)$$

Man sieht, dass die theoretische Vorhersage beim Potential fast exakt die Simulation widerspiegelt, bei der kinetischen Energie ist die Annäherung etwas schlechter, stimmt aber grob. Die Faktoren und Offsets zu erklären ist aber durchaus schwierig. Dass der Faktor beim Potential hier genau der stabilen Amplitude entspricht ist wohl eher Zufall. Betrachtet man das Modell mit anderen Parametern, stimmt dies dann nicht mehr.

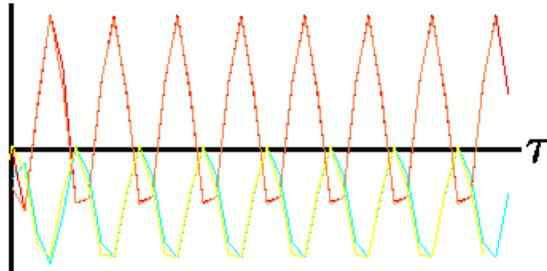


Abbildung 11: $V(\tau)$, $T(\tau)$ und $V_{fit}^{\text{theo}}(\tau)$, $T_{fit}^{\text{theo}}(\tau)$.

7 Fazit

Wir haben gesehen, dass die 4-dimensionale Raumzeit durch eine projektive Geometrie beschrieben und innerhalb der rationalen Zahlen angenähert werden kann. Auch haben wir gesehen, dass die Newtonsche Gesetze der Mechanik mit einem Sprungmechanismus auf Quadriken modelliert werden kann. Dies führt zur konsistenten Beschreibung kräftefreier Teilchen, die sich auf gradlinigen unbeschleunigten Bahnen bewegen. Kraftfelder wirken in diesem Modell als Verschiebungen der Quadrik an den einzelnen Punkten und sorgen so für eine Ablenkung der Trajektorie.

Desweiteren haben wir einen kanonischen Impuls definiert, der bezüglich des Skalarproduktes dual zur Geschwindigkeit ist und mit dessen Hilfe sich eine Legendretransformation definieren lässt.

Im Modell des harmonischen Oszillators haben wir gesehen, dass sich das kontinuierliche Modell der Ortstrajektorie im Limes gegen große γ_0 konstruieren lässt. Aufgrund der relativistischen Natur der Raumzeitvektoren konnten wir auch Kerngrößen des Energieumsatzes im System wie Gesamtenergie und Potential simulieren. Dabei zeigte sich, dass einer der fundamentalen Grundsätze der klassischen Mechanik, die Energieerhaltung, in diesem Fall verletzt wird.

Dies muss jedoch nicht bedeuten, dass das hier vorgestellte Modell unphysikalisch ist. Dass die Energieerhaltung nicht mehr gilt, liegt daran, dass wir hier keine kontinuierliche Zeitsymmetrie mehr haben, die nach dem Noether-Theorem diesen Erhaltungssatz erzeugt. Die Zeitsymmetrie ist vielmehr diskret und schon 1939 wurde in [6] gezeigt, dass man in so einem Fall eine Oszillation der Energie erwarten würde, wie wir es hier auch gesehen haben. In diesem Artikel wird auch beschrieben, dass diese Energiefluktuation durch elektromagnetische Abstrahlung erklärt und mit der Erhaltung der Gesamtenergie in Einklang gebracht werden kann. Dieser Ansatz sollte in einer finiten Theorie des Elektromagnetismus weiterverfolgt werden.

Zum Thema der Legendretransformation bleibt noch zu sagen, dass die von $\hat{p} \cdot \hat{u} = 0$ induzierte Legendretransformation nur bis auf ein Vorzeichen des Hamiltonians stimmt (siehe Gl. (63)). Eine Definition, die die Transformation konsistent lässt ist:

$$\hat{p}^t \hat{Q} \hat{u} = 0 \tag{71}$$

was keinesfalls der Definition, die hier getroffen wurde entspricht. Vielmehr ist hier \hat{p} eine Schar von Vektoren, genauer eine Hyperfläche im Einbettungsraum und damit direkt eine Gerade im projektiven Raum. Damit ist diese Definition nicht mehr eindeutig. Der Vorteil wäre das richtige Vorzeichen der Legendretransformation, allerdings ist dies auch nicht mehr konsistent mit der Punkte-Geraden-Dualität und damit wahrscheinlich keine sinnvolle Definition des Impulses. Es bleibt dann jedoch noch zu klären, warum dieses Vorzeichen von der herkömmlichen Legendretransformation abweicht und welche Konsequenzen dies hat.

Eine weitere Ungereimtheit des Modells zeigt sich darin, dass $\alpha \lambda_0 < 1$ gelten muss und damit bruchwertig sein muss. Nimmt man an, dass in diesem Modell eine Einheit der Länge, Masse etc. dem entspricht, was in der kontinuierlichen Physik eine fundamentale Einheit ist (Planck-Länge, Planck-Masse etc.)

würde man ja erwarten, dass wenn man Startauslenkung und Masse nur groß genug wählt eine Oszillation auf vielen tausend Planck-Längen einen makroskopischen harmonischen Oszillator erzeugt. Das Modell zwingt der Masse jedoch Restriktionen auf, indem immer $\lambda_0 = \frac{\gamma_0}{m_0} \in \mathbb{N}$ gelten muss und so der Masse eine Obergrenze gesetzt wird und diese immer der inversen Masse $\lambda_0 = 1$ entspricht. Damit entsteht aber kein makroskopischer Oszillator, sondern nur eine unphysikalische Zick-Zack-Bewegung, wodurch man gezwungen ist, α als Bruch < 1 zu wählen, obwohl im finiten Modell natürlich idealerweise alle beteiligten Parameter ganzzahlig sein sollten.

Dies erklärt sich aber daraus, dass hier das Modell in inhomogenen Koordinaten und in der Näherung damit in bruchwertigen Koordinaten betrachtet wird. In homogenen Koordinaten sind die Vektoren und damit auch \hat{a} beliebig skalierbar. Hier wurde $\gamma_0 = \kappa_0$ gewählt, dies kann und muss wohl aber auch anders gewählt werden, es gilt dann:

$$\hat{a} = \begin{pmatrix} \mathbf{a} \\ \kappa_0 = \gamma_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\gamma\lambda_0 \frac{\alpha_p}{\alpha_q} \begin{pmatrix} \vec{x} \cdot \vec{v} \\ \vec{x} \end{pmatrix} \\ \gamma_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\gamma\lambda_0 \alpha_p \begin{pmatrix} \vec{x} \cdot \vec{v} \\ \vec{x} \end{pmatrix} \\ \alpha_q \gamma_0 \end{pmatrix} \quad (72)$$

Ein Übergang von $\kappa_0 = \gamma_0$ zu $\kappa_0 = \alpha_q \gamma_0$ sorgt also dafür, dass alle vorkommenden Größen ganzzahlig sind.

Abschließend kann man sagen, dass dieses vereinfachte Modell schon vieles erklärt und auch Ergebnisse produziert, die großteils mit dem Kontinuumsmodell im Einklang stehen, was ein gutes Zwischenergebnis im Gesamtkontext des finiten Weltmodells darstellt. Allerdings besteht immernoch an manchen Ecken und Enden Bedarf nach einem Feinschliff und eine Einbettung in eine größere Theorie der Dynamik der Kraftfelder, die hier als fest angenommen wurden.

Literatur

- [1] Beutelsbacher A., Rosenbaum U. *Projektive Geometrie*. Springer. 2004
- [2] Mecke K. *Biquadrics configure finite projective geometry into a quantum spacetime*. EPL Europhysics letters. 2017
- [3] Veblen O., Young JW. *Projective Geometry: 2 vols*. Ginn Co., Boston, Mass. 1916
- [4] Mecke K. *Finite Projective Mechanics*. FAU Erlangen-Nürnberg. 2020
- [5] Pappas R.C. *Projective Quadrics, Poles, Polars and Legendre Transformations*. Widener University Chester. PA 19013 USA
- [6] Möglich F., Rompe R. *Über einige Folgerungen aus der Existenz eines kleinsten Zeitintervalles*. Zeitschrift für Physik. 1939