Lorentz-Transformationen in endlichen Raumzeiten

Bachelorarbeit

Vorgelegt von
Tobias Reinhart
4. Oktober 2016

Institut für Theoretische Physik I
Friedrich-Alexander-Universität Erlangen-Nürnberg
Betreuer: Prof. Dr. Klaus Mecke,
Alexander Laska

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung

Die allgemeine Relativitätstheorie (kurz ART) hat sich als Theorie der Gravitation in den letzten 100 Jahren etabliert. Sie modelliert die Raumzeit als vierdimensionale differenzierbare Mannigfaltigkeit, ausgestattet mit einem metrischen Tensor, einem symmetrischen (0,2)-Tensorfeld, das für jeden Punkt der Mannigfaltigkeit ein Skalarprodukt auf dem entsprechenden Tangentialraum definiert. Das Skalarprodukt erzeugt in jedem Tangentialraum eine Quadrik, welche Einheitslängen in die verschiedenen Raumzeitrichtungen definiert. Dies sagt uns in gewisser Weise, wie in dem jeweiligen Punkt der Raumzeit Längen zu messen sind. Das Skalarprodukt ist aber im Allgemeinen in jedem Punkt verschieden, wodurch in jedem Punkt Längen unterschiedlich gemessen werden und damit eine Krümmung der Raumzeit codiert werden kann. Weiterhin ist die Raumzeit der allgemeinen Relativitätstheorie lokal diffeomorph zum Minkowski-Raum $\mathbb{R}^{3+1}$ der speziellen Relativitätstheorie, also insbesondere lokal lorentzinvariant (vgl. [Pur13]).

Probleme treten allerdings dann auf, wenn neben der Gravitation Quanteneffekte eine Rolle spielen. Diese werden im Rahmen der Quantenfeldtheorie (kurz QFT) beschrieben. Da sich die beiden Theorien QFT und ART konzeptionell wesentlich unterscheiden, konnte bisher in dem Bestreben diese als Grenzfälle einer übergeordneten Theorie zu erhalten – die ART für große Längenskalen und daher kleine Quanteneffekte und die QFT für kleine Massen und deshalb vernachlässigbare, gravitative Effekte – kein Durchbruch erzielt werden. Viele der Theorien, die eine solche Vereinheitlichung von ART und QFT erzielen sollen, beispielsweise die Schleifenquantengravitation, lassen vermuten, dass für kleine Längenskalen die Raumzeit selbst quantisiert ist (siehe [Gar95]). Dieses Resultat motiviert die Konstruktion einer Theorie, welche nicht bereits bestehende Raumzeitmodelle quantisiert und damit diskretisiert, sondern vielmehr von Grund auf auf einer diskreten Menge aufgebaut wird.

In dieser Arbeit soll aus diesem Grund eine Theorie der Raumzeit untersucht werden, die als projektive Geometrie über einem endlichen Körper konstruiert wird. Durch die Verwendung eines endlichen Körpers erlangt die Raumzeit ihre endliche, diskrete Struktur. Weiterhin verallgemeinert die verwendete projektive Geometrie, die affine Geometrie der Tangentialräume in der ART, denn gegenüber der affinen Geometrie besitzt die projektive eine größere Symmetriegruppe ([Ric11] S. 334 ff.). Zudem kann durch ein Auszeichnen einer beliebigen Hyperebene eines projektiven Raumes, aus diesem ein affiner Raum gewonnen werden. Möchte man, wie in der ART, Längen und Abstände, also die metrische Struktur der Raumzeit mithilfe von Quadriken codieren, so treten in den verwendeten endlichen Körpern Probleme auf. Für einen gegebenen Punkt besitzt eine Quadrik nicht mehr genug Punkte, um von diesem Punkt ausgehend in jede Raumzeitrichtung einen Einheitsabstand zu definieren. Allerdings kann dies mit zwei Quadriken erreicht werden, einer sogenannten Biquadrik (vgl. [Las14], [Ale12]).

Als erste Ergebnisse auf diesem Gebiet ([Las14], [Ale12]) ist neben einer expliziten Parameterform der möglichen Biquadriken, sowie einer Einbettung beliebiger affiner Transformationen in den projektiven Raum, bezüglich einer beliebigen Hyperebene, insbesondere der Begriff eines Biquadrik-Felds von großer Bedeutung. Dieser bezeichnet eine Abbildung, die jedem Punkt des projektiven Raumes eine Biquadrik zuordnet, so dass dieser Punkt der Biquadrik als Zentrumspunkt dient. Damit existiert ausgehend von dem Zentrumspunkt in jede Richtung der Raumzeit ein Schnittpunkt. Dieser ermöglicht eine lokale Definition von Abständen um den jeweiligen Punkt. Das Biquadrik-Feld erlangt damit die Rolle des metrischen Tensorfeldes der ART.

Das Ziel dieser Arbeit besteht darin, durch eine Untersuchung der Symmetriegruppe des projektiven Raumes, sowie deren Wirkung auf das Biquadrik-Feld neue Erkenntnisse über die so konstruierte Raumzeit zu erlangen, insbesondere also auch zu verstehen inwiefern sich Ähnlichkeiten zur ART abzeichnen. Hierfür werden in Kapitel 2 zunächst einige grundlegende Konzepte und Definitionen wiederholt, sodass schließlich eine Definition der lokalen Invarianzgruppe der Biquadrik eines Raumzeitpunktes, also einer lokalen, endlichen Lorentz-Gruppe möglich wird. Kapitel 3 befasst sich mit der Untersuchung des Zusammenhangs der einzelnen Lorentz-Gruppen der verschiedenen Raumzeitpunkte. So kann schließlich gezeigt werden, dass die einzelnen Lorentz-Gruppen bereits alle isomorph sind. Es befindet sich also an jeden Raumzeitpunkt angeheftet eine lokale Invarianzgruppe der metrischen Struktur in diesem Punkt, wie dies auch in der ART der Fall ist. Kapitel 4 widmet sich der genaueren Untersuchung der Lorentz-Gruppe. Diese wird in ihre einzelnen Kompositionsfaktoren zerlegt. Wir nutzen hier insbesondere aus, dass auch die Lorentz-Gruppe endlich ist. In Kapitel 5 befassen wir uns mit der Frage, wie die einzelnen Bausteine der Lorentz-Gruppe wieder zu dieser zusammengesetzt werden können. Dies ermöglicht es uns, insbesondere die Ordnung der Lorentz-Gruppe und damit auch die Anzahl der verschiedenen Biquadriken zu bestimmen. Weiterhin kann daraus in Kapitel 6 eine besonders nützliche Darstellung der Lorentz-Gruppe gefunden werden. Aus dieser konstruieren wir schließlich sechs Matrizen, die jede Lorentz-Transformation auf eindeutige Weise als Produkt darstellen. Schlussendlich befasst sich Kapitel 7 mit der Frage, wie die restlichen Automorphismen des projektiven Raumes und damit die zusätzlichen Freiheitsgrade in der Matrixdarstellung der Biquadriken zu interpretieren sind. Wir identifizieren vier dieser Freiheitsgrade als Translationen und konstruieren aus diesen die Poincaré-Gruppe der endlichen Raumzeit.

2 Biquadriken in projektiven Räumen

Um überhaupt von Lorentz-Transformationen in endlichen Raumzeiten sprechen zu können, muss der mathematische Rahmen des Raumzeitmodells präzisiert werden. Dieser soll hier zunächst aus einer endlichen Menge mit zusätzlicher geometrischer Struktur bestehen. Die so entstandene Geometrie wird anschließend mithilfe sogenannter Biquadriken metrisiert. Damit die Mathematik dieser Konstruktion exakt verstanden werden kann, müssen zuerst einige grundlegende algebraische Strukturen definiert werden.

2.1 Grundlegende algebraische Strukturen

Die wohl allgemeinste dieser Strukturen ist die sogenannte Gruppenstruktur. Diese ist hier von besonderer Bedeutung, nicht nur weil viele der weiteren algebraischen Strukturen auf Gruppen aufgebaut werden, sondern vor allem weil sich Symmetrien auf natürliche Weise mit den Methoden der Gruppentheorie beschreiben lassen. Insbesondere soll hier in den folgenden Kapiteln auch die Gruppe der Raumzeitsymmetrien, die Lorentz-Gruppe, mit diesen Methoden untersucht werden.

Definition 2.1. *Gruppe (siehe hierzu Def. 2.1,2.2 in [Ros09])*
Eine Gruppe ist ein Paar $(G, \circ)$ *bestehend aus einer Menge* G *und einer binären Verknüpfung* $\circ : G \times G \longrightarrow G,\ (g_1, g_2) \longmapsto g_1 \circ g_2$*. Die Verknüpfung muss folgende Bedingungen erfüllen:*

(1) Assoziativität: $\forall a, b, c \in G : (a \circ b) \circ c = a \circ (b \circ c)$.

(2) Existenz eines neutrales Element: $\exists e \in G : \forall g \in G : e \circ g = g \circ e = g$.

(3) Existenz von inverses Elementen: $\forall g \in G : \exists g^{-1} \in G : g \circ g^{-1} = g^{-1} \circ g = e$.

Wir bezeichnen im Folgenden die Gruppe, bestehend aus dem Paar $(G, \circ)$, auch kurz als G. Ob damit die Gruppe selbst oder nur die zugrundeliegende Menge gemeint ist, ist aus dem Kontext ersichtlich. Auch werden wir, um die Notation zu erleichtern, für $a \circ b$ kurz ab schreiben, wenn es eindeutig ist, welche Verknüpfung gemeint ist.

Definition 2.2. *Ordnung einer Gruppe (siehe Def. 2.10 in [Ros09])*
Sei G *eine Gruppe, dann bezeichnet man die Kardinalität der zugrundeliegenden Menge* $|G|$ *als deren Ordnung. Wir schreiben dafür im Folgenden* $o(G)$ *oder* $|G|$*.*

Ist die Ordnung einer Gruppe endlich, das heißt ist $|G| < \infty$, so nennt man die Gruppe endlich. Endliche Gruppen sind für uns von Bedeutung, da für eine endliche Raumzeit auch alle Symmetriegruppen zwingend endlich sind. Zudem werden wir später noch feststellen, dass sich endliche Gruppen – aus Sicht der Gruppentheorie – wesentlich von solchen mit unendlicher Ordnung unterscheiden.

Definition 2.3. *Abelsche Gruppe (siehe Def. 2.3 in [Ros09])*
Eine Gruppe G heißt abelsch oder kommutativ, wenn gilt:

$$\forall a, b \in G : a \circ b = b \circ a. \tag{2.1}$$

Im Folgenden sind noch einige Beispiele von Gruppen angegeben.

Beispiel 2.1. *Gruppen*

- *Betrachte die Menge der ganzen Zahlen zusammen mit der Addition, dann bildet dieses Paar* $(\mathbb{Z}, +)$ *eine Gruppe mit neutralem Element* 0*. Desweiteren ist diese Gruppe aufgrund der Kommutativität der Addition abelsch.*

- *Betrachte jetzt die Menge* $N := \{1, ..., n\}$*, wobei* $n \in \mathbb{N}$ *beliebig gewählt werden kann. Eine Permutation dieser Menge ist definiert als eine bijektive Abbildung* $f : N \longrightarrow N$*. Die Menge der Permutationen von* N *bildet zusammen mit der Hintereinanderausführung als Verknüpfung und der Identitätsabbildung als neutralem Element eine Gruppe. Diese Gruppe ist offensichtlich endlich und wird mit* S_n *bezeichnet und symmetrische Gruppe genannt.*

- *Es sei* p *eine Primzahl. Definiere nun auf* $\mathbb{Z}$ *die Addition modulo* p*. Betrachte hierfür zunächst auf* $\mathbb{Z}$ *die Äquivalenzrelation*

$$\forall n, m \in \mathbb{Z} : n \sim m :\Leftrightarrow \exists k \in Z : n - m = k \cdot p \tag{2.2}$$

  und definiere dann auf der Menge der Äquivalenzklassen $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z} = \{[n]_\sim \mid n \in \mathbb{Z}\}$*, wobei* $[n]_\sim = \{m \in \mathbb{Z} \mid n \sim m\}$*, die folgende innere zweistellige Verknüpfung:*

$$+_{mod\ p} : \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}/p\mathbb{Z},\ [m]_\sim +_{mod\ p} [n]_\sim = [n + m]_\sim. \tag{2.3}$$

  Dann bildet das Paar $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}, +_{mod\ p})$ *eine Gruppe mit neutralem Element* $[0]_\sim$*. Die so definierte Gruppe besteht also gerade aus den Elementen* $0, ..., p-1$ *und besitzt deshalb Ordnung* p*.*

In Gruppen ist eine innere Verknüpfung definiert, die im Folgenden als Multiplikation bezeichnet werden soll. Ergänzt man diese Multiplikation mit einer zweiten Verknüpfung, die in gewisser Weise mit der Multiplikation verträglich ist, so erhält man eine weitere algebraische Struktur, den sogenannten Körper.

Definition 2.4. *Körper (vgl. hierzu [KB13] S. 326, Def.3.9)*
Ein Körper, hier und im Folgenden bezeichnet mit $\mathbb{K}$*, ist ein Tripel* $(K, +, \cdot)$*, wobei* K *eine Menge ist und* $+$ *und* $\cdot$ *zwei innere zweistellige Verknüpfungen auf* K *sind, bezeichnet als Addition und Multiplikation. Die Verknüpfungen müssen folgende Bedingungen erfüllen:*

(1) $(K, +)$ *ist eine abelsche Gruppe.*

(2) $(K \setminus \{0\}, \cdot)$ *ist eine abelsche Gruppe.*

(3) Distributivgesetze[1]*:* $\forall a, b, c \in K$*:*

(i) $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$,

(ii) $(b + c) \cdot a = b \cdot a + c \cdot a$.

Wieder wird ein Körper endlich genannt, wenn die zugrundeliegende Menge endlich ist, das heißt wenn $|K| < \infty$*.*

Bemerkung. *Wir bezeichnen das neutrale Element der multiplikativen Gruppe* $(K/\{0\}, \cdot)$ *als 1 oder auch als e und das neutrale Element der additiven Gruppe* $(K, +)$ *als 0.*

Beispiel 2.2. *Körper*

- *Die reellen Zahlen ausgestattet mit der gewöhnlichen Addition und Multiplikation,* $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ *bilden einen Körper. Dieser ist offensichtlich nicht endlich.*
- *Betrachten wir die zuvor definierte Gruppe* $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}, +_{mod\ p})$ *und definieren zusätzlich eine Multiplikation:*

$$\begin{aligned} \cdot_{mod\ p} : \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \setminus \{[0]_\sim\} \times \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \setminus \{[0]_\sim\} &\longrightarrow \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \setminus \{[0]_\sim\} \\ ([m]_\sim, [n]_\sim) &\longmapsto [m]_\sim \cdot_{mod\ p} [n]_\sim := [m \cdot n]_\sim, \end{aligned} \tag{2.4}$$

  so bildet $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}, +_{mod\ p}, \cdot_{mod\ p})$ *einen Körper mit p Elementen.*

Körper sind von großer Bedeutung, da sie der Koordinatisierung abstrakter geometrischer Räume dienen. In ihnen kann wie in den reellen Zahlen gerechnet werden. Von besonderer Wichtigkeit sind für uns hier die endlichen Körper, da nur sie als Koordinatenbereich von endlichen Raumzeiten in Frage kommen. Wie in vielen anderen Bereichen der Physik auch ist die geforderte Kommutativität der multiplikativen Gruppe nicht zwingend notwendig. Die so erzeugte algebraische Struktur, das heißt die eines Körpers ohne abelscher multiplikativer Gruppe, bezeichnet man als Schiefkörper. Jedoch ist nach dem Satz von Wedderburn jeder endliche Schiefkörper bereits ein Körper (siehe hierzu [Wit31]). Dies rechtfertigt die vorherige Einschränkung auf Körper als Koordinatenbereich der endlichen Raumzeiten.

Zuletzt muss noch der Begriff des Vektorraumes geklärt werden. Vektorräume dienen uns als Gerüst der affinen Geometrie, auf der später die projektiven Räume definiert werden sollen. Das Konzept des Vektorraumes verallgemeinert hierbei den klassischen euklidschen Vektorraum $\mathbb{R}^3$.

[1] Hier sei angemerkt, dass bereits die Forderung nach einem der beiden Distributivgesetze, zum Beispiel Linksdistributivität, genügt. Das jeweils andere Distributivgesetz folgt aus der Kommutativität. Dennoch sind der Vollständigkeit halber hier beide Distributivgesetze aufgelistet.

Definition 2.5. *Vektorraum (siehe S. 334, Def. 3.13 in [KB13])*
Es sei $\mathbb{K} = (K, +, \cdot)$ *ein Körper und* V *eine Menge. Ein Vektorraum über dem Körper* $\mathbb{K}$ *oder kurz* $\mathbb{K}$*-Vektorraum ist ein Tripel* $(V, \oplus, \bullet)$*, wobei* $\oplus$*, die Vektoraddition, eine innere zweistellige Verknüpfung auf* V *und* $\bullet : V \times K \longrightarrow V$ *eine äußere zweistellige Verknüpfung (genannt Skalarmultiplikation) ist. Für die beiden Verknüpfungen sind folgende Bedingungen gefordert.*

(1) $(V, \oplus)$ *ist eine abelsche Gruppe.*

(2) Verträglichkeit der Skalarmultiplikation mit Vektoraddition und den Verknüpfungen aus $\mathbb{K}$*,* $\forall \alpha, \beta \in K, u, v \in V$*:*

  (i) Distributivität: $\alpha \bullet (u \oplus v) = \alpha \bullet u \oplus \alpha \bullet v$.

  (ii) Distributivität: $(\alpha + \beta) \bullet u = (\alpha \bullet u) \oplus (\beta \bullet u)$.

  (iii) Assoziativität: $\alpha \bullet (\beta \bullet u) = (\alpha \cdot \beta) \bullet u$.

  (iiii) Es sei $1 \in K$ *das neutrale Element von* $\mathbb{K}$*, dann gilt:* $1 \bullet v = v$.

Bemerkung. *Wie schon bei der Gruppe verzichten wir in unserer Notation auf das Symbol für die Skalarmultiplikation, schreiben also* λu *für* $\lambda \bullet u$*. Ob damit die Skalarmultiplikation oder die Multiplikation des Grundkörpers gemeint ist, sollte aus dem Kontext ersichtlich sein. Auf die gleiche Weise schreiben wir* $u + v$ *anstatt* $u \oplus v$*, da auch hier wieder aus dem Zusammenhang klar sein sollte, um welche Addition es sich handelt.*

Beispiel 2.3. *Vektorräume*

- *Für einen beliebigen Körper* $\mathbb{K}$ *und ein* $n \in \mathbb{N}$ *ist das n-fache kartesische Produkt,* $\mathbb{K}^n = \{(a_1, ..., a_n) \mid \forall i = 1, ..., n : a_i \in \mathbb{K}\}$ *ausgestattet mit der komponentenweisen Vektor-Addition* $\oplus$*:*

$$(a_1, ..., a_n) \oplus (b_1, ..., b_n) := (a_1 + b_1, ..., a_n + b_n), \tag{2.5}$$

  sowie der Skalarmultiplikation $\bullet$*:*

$$\forall \lambda \in \mathbb{K} : \lambda \bullet (a_1, ..., a_n) := (\lambda \cdot a_1, ..., \lambda \cdot a_n), \tag{2.6}$$

  also daas Tripel $(\mathbb{K}, \oplus, \bullet)$ *ein Vektorraum.*

2.2 Konstruktion projektiver Räume

Die Struktur, welche die Raumzeit ausstattet, sollte anfangs so allgemein wie möglich gewählt werden. Jede zusätzliche Forderung an diese, sowie jede weitere Einschränkung sollte nur dann hinzugezogen werden, wenn dies physikalisch zwingend notwendig ist, nicht aber um Aspekte des Modells zu vereinfachen.

Allerdings lässt sich nicht bestreiten, dass der Begriff einer Geometrie für eine physikalisch relevante Raumzeit unabdingbar ist. Erst damit ist es möglich, die gegenseitige Lagebeziehung zwischen Objekten innerhalb der Raumzeit zu beschreiben. Die Raumzeit soll hier mit den Methoden der projektiven Geometrie beschrieben werden. Projektive Geometrien lassen sich rein synthetisch über Axiome definieren. Hier soll allerdings ein analytischer Zugang, die Konstruktion eines projektiven Raumes über einem affinen Vektorraum, präsentiert werden. Dies hat den zusätzlichen Vorteil, dass der so entstandene Raum direkt koordinatisiert ist.

Definition 2.6. *Homogenität (siehe S. 47 ff. in [Ric11])*
Es sei $\mathbb{K}$ ein beliebiger Körper und $\mathbb{K}^n$ n-dimensionaler Vektorraum über $\mathbb{K}$, dann ist Homogenität definiert als folgende Äquivalenzrelation:

$$\begin{aligned} \sim \subseteq (\mathbb{K}^n \setminus \{0\}) \times (\mathbb{K}^n \setminus \{0\}) : \\ \forall (p,q) \in (\mathbb{K}^n \setminus \{0\}) \times (\mathbb{K}^n \setminus \{0\}) : p \sim q :\Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0\} : p = \lambda \cdot q. \end{aligned} \tag{2.7}$$

Die so definierte Relation ist offensichtlich reflexiv, transitiv und symmetrisch und damit tatsächlich eine Äquivalenzrelation. Durch Äquivalenzklassenbildung bezüglich dieser Homogenitätsrelation kann nun aus einem affinen (n+1)-dimensionalen $\mathbb{K}$ Vektorraum ein n-dimensionaler projektiver Raum konstruiert werden.

Definition 2.7. *Projektiver Raum (siehe hierzu S. 27 in [Las14])*
Der n-dimensionale projektive Raum über dem Körper $\mathbb{K}$, $\mathbb{P}^n\mathbb{K}$ ist der folgende Quotientenraum:

$$\mathbb{P}^n\mathbb{K} := (\mathbb{K}^{n+1} \setminus \{0\}) / \sim = \Big\{ [p]_\sim \mid p \in (\mathbb{K}^{n+1} \setminus \{0\}) \Big\}. \tag{2.8}$$

Da im Folgenden endliche Raumzeiten untersucht werden sollen, muss insbesondere der zugrundeliegende Körper, über dem der projektive Raum konstruiert wird, endlich sein. Wir haben zuvor bereits gesehen, dass für jede Primzahl p, $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}, +_{mod\ p}, \cdot_{mod\ p})$ ein Körper mit p Elementen ist. Allgemeiner gibt es endliche Körper sogar für jede Primzahlpotenz und diese sind bis auf Isomorphie sogar eindeutig. Man bezeichnet diese Körper als Galoiskörper.

Satz 2.1. *Galoiskörper*
Es seien $p \in \mathbb{P}, n \in \mathbb{N}$ beliebig, $q = p^n$ dann existiert bis auf Isomorphie exakt ein Körper mit Ordnung q. Diesen Körper bezeichnet man als Galoiskörper $\mathbb{F}_q$.

Beweis. Für den Beweis vergleiche S. 85 ff. in [Bos09]. □

Für $n = 1$ und damit $q = p \in \mathbb{P}$ sind die Galoiskörper gerade die Restklassenkörper[2] $\mathbb{F}_q = \mathbb{Z}/q\mathbb{Z}$. Galoiskörper zu Primzahlpotenzen werden als Körpererweiterungen über den Restklassenkörpern konstruiert. Im Folgenden werden wir uns auf endliche Raumzeiten

[2]Gewöhnlich werden die Restklassenkörper als $\mathbb{F}_p$ bezeichnet. Wir schreiben $\mathbb{F}_q$, da p schon die Punkte der Raumzeit bezeichnet.

beschränken, die durch Restklassenkörper[3] koordinatisiert werden können. Die hier untersuchte Raumzeit ist also zunächst ein vierdimensionaler projektiver Raum über einem Restklassenkörper $\mathbb{P}^4\mathbb{F}_q$.

2.3 Biquadriken als metrische Struktur

Um neben den Lagebeziehungen der einzelnen Objekte innerhalb der Raumzeit Abstände und Längen konkretisieren zu können, ist zusätzliche metrische Struktur erforderlich. Hier ergeben sich einige Probleme durch die geforderte Koordinatisierung über Restklassenkörper oder endliche Körper im Allgemeinen, die insbesondere durch deren Zyklizität entstehen. Durch den Verzicht auf die Verwendung reeller Zahlen geht auch die Wohlordnung verloren. Ein gewöhnlicher Abstandsbegriff (als Differenz der Koordinaten) ist nicht mehr ohne Weiteres möglich. So würde ein Entfernen von einem Punkt zwar zunächst zu einem Vergrößern des Abstandes führen, dann würde der Abstand allerdings wieder kleiner werden, bis man den Anfangspunkt wieder erreicht.

Dieses Problem kann behoben werden, indem der Abstand eines Punktes zu dessen Nachbarn vorerst nur in dessen unmittelbarer Umgebung definiert wird. Genauer: Jede Gerade durch diesen Punkt erzeugt zwei Richtungen und in jede dieser Richtungen wird ein Einheitsabstand definiert. Diese Einheitsabstände ergeben sich als Schnitt der jeweiligen Linie mit der sogenannten Biquadrik, einem Paar aus zwei Quadriken. Eine Quadrik ist hierbei der Kern, das heißt die Nullstellenmenge, einer quadratischen Form.

Definition 2.8. *Symmetrische Bilinearform (siehe [KB13] S. 561)*
Es sei V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum, dann bezeichnet man eine Abbildung

$$b : V \times V \longrightarrow V,\ (v, w) \longmapsto b(v, w), \tag{2.9}$$

als Bilinearform auf V, wenn b in beiden Argumenten linear ist, das heißt wenn für $v_1, v_2, w_1, w_2 \in V$ und $\lambda \in \mathbb{K}$ gilt:

- $b(\lambda v_1 + v_2, w_1) = \lambda b(v_1, w_1) + b(v_2, w_1)$,
- $b(v_1, \lambda w_1 + w_2) = \lambda b(v_1, w_1) + b(v_1, w_2)$.

Gilt zusätzlich $b(v, w) = b(w, v)$, so bezeichnet man b als symmetrische Bilinearform.

Definition 2.9. *Quadratische Form (siehe S. 53 in [HM08])*
Eine quadratische Form ist eine Abbildung von einem $\mathbb{K}$-Vektorraum V in den zugrundeliegenden Körper $\mathbb{K}$, $q : V \longrightarrow \mathbb{K}$, die die folgenden zwei Bedingungen erfüllt:

(1) $\forall v \in V : \forall k \in \mathbb{K} : q(k \cdot v) = k^2 \cdot q(v)$, Faktoren können aus q also quadratisch herausgezogen werden.

[3] Dennoch gelten viele der hier erreichten Ergebnnisse auch für beliebige, endliche Körper. Bezeichen wir einen Körper mit $\mathbb{K}$ so ist ein beliebiger (endlicher) Körper gemeint. Schreiben wir $\mathbb{F}_q$ so beschränken wir uns auf Restklassenkörper.

(2) Die von q induzierte Abbildung $B : V \times V \longrightarrow \mathbb{K}$, definiert durch $(v, w) \longmapsto B(v, w) := q(v + w) - q(v) - q(w)$, ist symmetrisch und bilinear.

Aus jeder quadratischen Form kann durch (2) eine symmetrische Bilinearform konstruiert werden. Umgekehrt ist offensichtlich für jede symmetrische Bilinearform b die Abbildung $v \longmapsto b(v, v)$ eine quadratische Form. Damit besteht also ein Eins-zu-eins-Zusammenhang zwischen symmetrischen Bilinearformen und quadratischen Formen. Neben dieser abstrakten Definition lässt sich jede projektive quadratische Form auch durch eine projektive Matrix darstellen. Dies hat den Vorteil, dass sich jetzt viele Techniken und Konzepte der linearen Algebra anwenden lassen. Die quadratische Form und damit die Quadrik kann verstanden werden, wenn die zugehörige Matrix verstanden wird.

Damit dieser Gedanke präzisiert werden kann, muss zunächst geklärt werden, was eine projektive Matrix ist. Für einen beliebigen Körper $\mathbb{K}$ bilden die $n \times n$ Matrizen mit Einträgen in $\mathbb{K}$ einen $\mathbb{K}$-Vektorraum. Dieser ist offensichtlich isomorph zu $\mathbb{K}^{n^2}$. Die Isomorphie wird hierbei deutlich, wenn die Komponenten der n^2-Tupel aus $\mathbb{K}^{n^2}$ in Form einer quadratischen Matrix angeordnet werden. Da die $n \times n$ Matrizen $\mathbb{K}^{n \times n}$ also einen Vektorraum formen, kann insbesondere die Homogenitäts-Äquivalenzrelation auf diesem Raum definiert werden. Die Menge der so konstruierten Äquivalenzklassen bezeichnet man als projektive Matrizen.

Definition 2.10. *Projektive Matrizen*
Es bezeichne $\mathbb{K}^{n \times n}$ die Menge der $n \times n$ Matrizen mit Einträgen in $\mathbb{K}$. Die projektiven Matrizen ergeben sich dann, wie schon zuvor, als Quotientenraum:

$$\mathbb{P}^{n \times n}\mathbb{K} := \mathbb{K}^{(n+1)\times(n+1)} / \sim . \tag{2.10}$$

Die projektiven Matrizen sind also gerade die Matrizen über $\mathbb{K}$ bis auf Homogenität, also bis auf das Bilden von Vielfachen. Jetzt lässt sich auch zuvor erwähnte Aussage konkretisieren.

Satz 2.2. *Es sei q eine beliebige Quadratische Form auf einem projektiven Raum*[4] *$\mathbb{P}^n\mathbb{F}_q$ über dem Restklassenörper $\mathbb{F}_q$,*

$$q : \mathbb{P}^n\mathbb{F}_q \longrightarrow \mathbb{F}_q, \tag{2.11}$$

dann existiert ein $M \in \mathbb{P}^{n \times n}\mathbb{F}_q$ mit folgender Eigenschaft:

$$\forall p \in \mathbb{P}^n\mathbb{F}_q : q(p) = p^t M p = M_{ij} p^i p^j. \tag{2.12}$$

Beweis. Folgt aus der Tatsache, dass sich jede quadratische Form durch eine symmetrische Bilinearform darstellen lässt, und diese nach Wahl einer Basis des zugrundeliegenden affinen Raumes durch eine Matrix dargestellt werden kann. Betrachtet man nun die Homogenitäts-Äquivalenzklassen, so folgt die Behauptung für den projektiven Raum (vgl. S. 37 in [Las14]). □

[4] Hier ist zu beachten, dass q nur auf dem affinen Teilraum von $\mathbb{P}^n\mathbb{F}_q$ eine quadratische Form ist, denn nur dieser Teilraum trägt die Vektorraumstruktur. Da allerdings nach Auswahl einer Hyperebene und anschließender Exklusion dieser, der projektive Raum ohne Weiteres zu einem affinen Raum geschlitzt werden kann, stellt dies hier kein Problem dar.

Hierbei wurde im letzten Schritt die einsteinsche Summenkonvention[5] verwendet.

Beispiel 2.4. *Quadratische Formen*

- *Die quadratische Form des Standardskalarprodukts des n-dimensionalen euklidischen Raumes besitzt die Darstellungsmatrix* $\mathbb{1}_n$.
- *Die zur Minkowski-Metrik der speziellen Relativitätstheorie gehörende quadratische Form besitzt die Darstellungsmatrix* $\operatorname{diag}(1, -1, -1, -1)$.

Die Darstellungsmatrix kann hier o. B. d. A. als symmetrisch[6] vorrausgesetzt werden, denn jede quadratische Matrix M kann in einen symmetrischen Anteil M_s und einen antisymmetrischen Anteil M_{as} zerlegt werden:

$$M = \frac{1}{2}(M + M^t) + \frac{1}{2}(M - M^t) = M_s + M_{as}. \tag{2.13}$$

Und für die zugehörige quadratische Form folgt:

$$\forall p \in \mathbb{P}^n\mathbb{F}_q : p^t M_{as} p = 0 \Rightarrow p^t M p = p^t M_s p. \tag{2.14}$$

Weiterhin sollen in der folgenden Arbeit nur nicht degenerierte Quadriken behandelt werden, das heißt solche bei denen die Darstellungsmatrix vollen Rang besitzt.
Schließlich lässt sich jetzt die projektive Quadrik definieren.

Definition 2.11. *Projektive Quadrik (siehe S. 37 in [Las14])*
Es sei $M \in \mathbb{P}^{n\times n}\mathbb{F}_q$ *die Darstellungsmatrix einer quadratischen Form q auf dem projektiven Raum* $\mathbb{P}^n\mathbb{F}_q$, *dann ist die zugehörige Quadrik* Q_M *die Nullstellenmenge der quadratischen Form, das heißt:*

$$Q_M := \Big\{p \in \mathbb{P}^n\mathbb{F}_q \mid p^t M p = 0\Big\}. \tag{2.15}$$

Nun stellt sich die Frage, ob zwischen der soeben definierten Quadrik und der Darstellungsmatrix der quadratischen Form ein eindeutiger Zusammenhang besteht. Es ist also zu klären, ob gegebenenfalls zwei verschiedene Matrizen $A, B \in \mathbb{F}_q^{n\times n}$ existieren, sodass die beiden durch diese Matrizen definierten Quadriken dieselbe Punktmenge bezeichnen. Tatsächlich ist dies unter den zuvor an die Darstellungsmatrizen gestellten Bedingungen, nämlich, dass A, B symmetrisch sind und vollen Rang besitzen, nicht möglich. Um dies zu beweisen, zeigen wir zuerst, dass unter diesen Voraussetzungen der Zusammenhang zwischen quadratischer Form und Darstellungsmatrix eindeutig ist.

Satz 2.3. *Es seien* $A, B \in \mathbb{K}^{n\times n}$ *zwei symmetrische Matrizen mit vollem Rang, die die gleiche quadratische Form q darstellen, das heißt* $q_A = q_B = q$, *so sind A und B bereits gleich.*

[5] Die einsteinsche Summenkonvention besagt, dass über doppelt auftretende Indizes, von denen sich einer oben und einer unten befindet, summiert wird.

[6] Man bezeichnet eine Matrix M als symmetrisch, wenn sie gleich ihrer transponierten Matrix ist, wenn also gilt: $M^t = M$.

Beweis. Es gilt für alle Punkte $p \in \mathbb{K}^n$:

$$p^t A p = q_A(p) = q_B(p) = p^t B p. \tag{2.16}$$

Betrachte jetzt $C := A - B$, dann folgt:

$$\forall p \in \mathbb{K} : q_C(p) = p^t(A - B)p = p^t A p - p^t B p = 0. \tag{2.17}$$

Daher gilt dies insbesondere für $p = e_i = (0, ..., 1, ...0)^t$ wobei der i-te Eintrag von e_i gleich 1 ist und alle anderen gleich 0 sind. Somit erhalten wir:

$$0 = e_i^t C e_i = C_{i,i}. \tag{2.18}$$

Da i beliebig gewählt war, verschwinden alle Diagonaleinträge von C. Weiterhin gilt für $e_i + e_j$ mit $i \neq j$ aufgrund der Bilinearität von C:

$$0 = (e_i + e_j)^t C(e_i + e_j) = e_i^t C e_i + e_j^t C e_j + e_i^t C e_j + e_j^t C e_i = C_{i,i} + C_{j,j} + C_{i,j} + C_{j,i}. \tag{2.19}$$

Da die Diagonaleinträge identisch 0 sind, ist $C_{i,j} = -C_{j,i}$. Da allerdings A und B symmetrisch gewählt waren, also gilt $C^t = (A - B)^t = A^t - B^t = A - B = C$, ist auch C symmetrisch und deshalb folgt[7]:

$$C_{i,j} = -C_{j,i} = -C_{i,j} \Leftrightarrow C_{i,j} = 0. \tag{2.20}$$

Und da i, j beliebig gewählt waren, ist C bereits identisch 0 und damit $A = B$. □

Wir haben gezeigt, dass der Zusammenhang zwischen quadratischen Formen und deren symmetrischen Darstellungsmatrizen ein-eindeutig ist. Wir müssen allerdings noch zeigen, dass eine gegebene Quadrik die zugehörige quadratische Form eindeutig bestimmt, um zu dem gewünschten Ergebnis zu gelangen.

Satz 2.4. *Es sei $Q_M := \{p \in \mathbb{K}^n \mid q_M(p) = 0\}$ eine nicht ausgeartete Quadrik[8] auf dem $\mathbb{K}$-Vektorraum $\mathbb{K}^n$, und q_N eine quadratische Form, sodass die beiden Quadriken $Q_M = Q_N$ als Punktmenge übereinstimmen, dann sind die beiden quadratischen Formen q_M, q_N bereits bis auf einen Faktor identisch.*

Beweis. Siehe hierfür Folgerung 10.5, Kapitel VI aus [Brö03]. □

Bemerkung. *Da in dieser Arbeit Quadriken ohnehin nur in projektiven Räumen untersucht werden sollen, ist der Faktor zwischen den beiden quadratischen Formen irrelevant. Insbesondere ist also gezeigt, dass auch der Zusammenhang zwischen Quadrik und Darstellungsmatrix ein-eindeutig ist.*

[7] Hier verwenden wir $\mathrm{char}(\mathbb{K}) \neq 2$. Ein Körper $\mathbb{K}$ hat Charakteristik n, also $\mathrm{char}(\mathbb{K}) = n$, genau dann, wenn die kleinste natürliche Zahl $m \in \mathbb{N}$ für die $\sum_{i=1}^m 1 = 0$ gilt, n ist. Körper haben immer Charakteristik prim und da wir uns in diesem Modell auf die Körper $\mathbb{F}_q$ mit ausreichend großem q beschränken ist der Fall $\mathrm{char}(\mathbb{K}) = 2$ bedenkenlos von vornherein auszuschließen.

[8] Nicht ausgeartet bedeutet, dass die Darstellungsmatrix M vollen Rang besitzt.

Zuletzt soll noch ein weiteres wichtiges Konzept eingeführt werden, welches später von Bedeutung sein wird: die Polare oder auch die Polarhyperebene eines Punktes unter der symmetrischen Bilinearform, beziehungsweise unter der Darstellungsmatrix M. Im Bild der Geometrie ist diese Polare tatsächlich eine Hyperebene. Für unseren Zweck genügt es allerdings, sie als Kovektor oder noch einfacher nach dem Riesz-Lemma schlicht selbst wieder als Vektor aufzufassen. Nach dem Riesz-Lemma existiert nämlich ein Isomorphismus zwischen einem Vektorraum $\mathbb{K}$-Vektorraum V und seinem Dualraum V^*, das heißt dem Raum der linearen Abbildungen von V nach $\mathbb{K}$, beziehungsweise dem Raum der Kovektoren. Daher sind die beiden Vektorräume isomorph und wir können deren Elemente miteinander identifizieren[9] (siehe hierzu [KB13] S. 372).

Definition 2.12. *Polare (vgl. S. 38 in [Las14])*
Es sei $M \in \mathbb{P}^{n\times n}\mathbb{F}_q$ die Darstellungsmatrix einer quadratischen Form und wie zuvor sei o. B. d. A. M bereits symmetrisch. Die Polare eines Punktes $p \in \mathbb{P}^n\mathbb{F}_q$, $pol_M(p)$ ist folgende lineare Abbildung:

$$\mathbb{P}^n\mathbb{F}_q^* \ni pol_M(p) := Mp : \mathbb{P}^n\mathbb{F}_q \longrightarrow \mathbb{F}_q \text{ , mit } \mathbb{P}^n\mathbb{F}_q \ni \tilde{p} \longmapsto Mp(\tilde{p}) := \tilde{p}^t Mp. \tag{2.21}$$

Satz 2.5. *Transformationsverhalten der Polaren*
Sei π eine Projektivität, dann transformiert die Polare[10] eines Punktes p unter dieser Projektivität gemäß:

$$pol_M(p) \longmapsto \pi^{-t} pol_M(p). \tag{2.22}$$

Beweis. Für den Beweis siehe S. 42 aus [Las14]. □

Wie zuvor erwähnt besteht der Nutzen der Quadrik darin, für einen ausgewählten Punkt, den Zentrumspunkt, lokal in jede Richtung einen Einheitsabstand zu definieren. Dieser soll gegeben sein durch den Schnittpunkt der Quadrik mit der Geraden durch den Punkt. Allerdings entsteht nun ein neues Problem. Auf der Quadrik im projektiven Raum $\mathbb{P}^n\mathbb{F}_q$ liegen $\frac{1-q^n}{1-q}$ Punkte[11] und es existieren genauso viele Geraden durch den Zentrumspunkt. Jedoch beschreibt jede Gerade zwei Richtungen. Die Quadrik besitzt also nicht genug Punkte, um in jede Richtung einen Schnittpunkt zu liefern. Dieses Problem kann gelöst werden, indem statt einer, zwei Quadriken verwendet werden.

Definition 2.13. *Biquadrik (siehe S. 54 in [Las14])*
Eine Biquadrik ist ein Paar, bestehend aus zwei Quadriken (Q_M, $Q_{\overline{M}}$), sodass für einen ausgewählten Punkt, den sogenannten Zertrumspunkt $p_c \in \mathbb{P}^n\mathbb{F}_q$, jede Gerade durch p_c insgesamt zweimal mit den beiden Quadriken schneidet.

Wir werden uns jetzt und im Folgenden auf solche Biquadriken einschränken für die die Polare eindeutig ist, das heißt solche für die gilt:

$$pol_M(p_c) = pol_{\overline{M}}(p_c). \tag{2.23}$$

[9] Ein Punkt p liegt dann auf einer polaren Hyperebene h, wenn deren formales Skalarprodukt Null ergibt, wenn also $h \circ p = h_i p_i = 0$.
[10] Allgemein transformiert jede Hyperebene $h \in \mathbb{P}^n\mathbb{F}_q^*$ gemäß dieser Vorschrift.
[11] Wobei $|\mathbb{F}_q| = q$ ist (vergleiche hierzu S. 54 [Las14]).

Andere Biquadriken sind auszuschließen, da sich nur für den eben beschriebenen Fall einer gemeinsamen Polaren, das Quadrikpaar auf den Standard-Zentrumspunkt $(0, ..., 0, 1)^t$ und die Standard-Polare $(0, ..., 0, 1)^t$ verschieben lässt. Dies ist notwendig, um später eine bis auf Isomorphie eindeutige Lorentz-Gruppe zu erhalten. Wir werden später zeigen, dass auch jede Biquadrik, bis auf ein Vertauschen der beiden Quadriken, eindeutig durch ihr Matrixpaar bestimmt ist. Befindet sich die Biquadrik im Standard-Zentrumspunkt der Raumzeit, so lässt sich eine besonders einfache, explizit parametrisierte Matrixdarstellung angeben.

Satz 2.6. *Es sei $(Q_M, Q_{\overline{M}})$ eine Biquadrik über $\mathbb{P}^n\mathbb{F}_q$ mit Zentrumspunkt $p_c = (\vec{0}^t, 1)^t$, gemeinsamer Polare $pol_M(p_c) = pol_{\overline{M}}(p_c) = (\vec{0}^t, 1)^t$ und Darstellungsmatrizen $(M, \overline{M})$. Dann existiert ein $A \in \mathbb{F}_q^{n\times n}$ und ein $\alpha \in \overline{\mathscr{Q}}$[12], sodass*

$$(M, \overline{M}) = \left(\begin{pmatrix} A & \vec{0} \\ \vec{0}^t & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \alpha A & \vec{0} \\ \vec{0}^t & 1 \end{pmatrix} \right). \tag{2.24}$$

Beweis. Siehe für den Beweis S. 25 ff. aus [Ale12]. □

Die Matrixdarstellung ist hier zwar vorerst nur für den Spezialfall mit Zentrumspunkt $p_c = (\vec{0}^t, 1)^t$ und Polare $pol_M(p_c) = pol_{\overline{M}}(p_c) = (\vec{0}^t, 1)^t$ gegeben, jedoch wird im Verlauf der Arbeit noch deutlich werden, dass dieser Spezialfall für eine Untersuchung der Lorentz-Gruppe der endlichen Raumzeit bereits ausreichend ist.

Eine Biquadrik mit Zentrumspunkt p_c ermöglicht jetzt eine lokale Abstandsdefinition um den Punkt p_c, da ausgehend vom Zentrumspunkt in jede in der endlichen Raumzeit existierende Richtung zwei Schnittpunkte mit der Biquadrik existieren und der Definition eines Einheitsabstandes dienen können. Um jedoch die gesamte Raumzeit mit einer metrischen Struktur zu versehen, genügt die Definition eines Einheitsabstandes in einem einzelnen, ausgezeichneten Punkt nicht. Vielmehr ist eine solche nun in jedem Punkt der Raumzeit notwendig. Dies kann erzielt werden, indem in jeden Raumzeitpunkt eine Biquadrik angeheftet wird. Das so entstandene Konzept wird als Biquadrik-Feld bezeichnet. Da in verschiedenen Punkten im Allgemeinen auch verschiedene Biquadriken angeheftet werden, werden insbesondere Längen an verschiedenen Raumzeitpunkten unterschiedlich gemessen. So lässt sich eine Krümmung der Raumzeit codieren.

Definition 2.14. *Biquadrik-Feld (siehe [Las14] S. 68)*
Eine Abbildung

$$\beta : \mathbb{P}^n\mathbb{F}_q \longrightarrow \mathscr{B} := \left\{ (Q_M, Q_{\overline{M}}) \in \mathfrak{P}(\mathbb{P}^n\mathbb{F}_q \times \mathbb{P}^n\mathbb{F}_q) \mid (Q_M, Q_{\overline{M}}) \text{ ist Biquadrik} \right\}, \tag{2.25}$$

heißt Biquadrik-Feld genau dann, wenn

$$\forall p \in \mathbb{P}^n\mathbb{F}_q : p_c(\beta(p)) = p. \tag{2.26}$$

Das heißt, für jeden Punkt der Raumzeit liefert β eine Biquadrik deren Zentrumspunkt eben dieser Punkt ist[13].

[12] $\overline{\mathscr{Q}}$ bezeichnet hier die Nichtquadratzahlen in $\mathbb{F}_q$, das heißt: $\alpha \in \overline{\mathscr{Q}} \Leftrightarrow \nexists w \in \mathbb{F}_q : w^2 = \alpha$.
[13] $\mathfrak{P}(M)$ bezeichnet die Potenzmenge von M.

Im Folgenden wird $\beta(p)$ auch als Biquadrik am Punkt p bezeichnet, wenn dies aus dem Kontext klar ist.

2.4 Automorphismen in projektiven Räumen

Die Lorentz-Transformationen der speziellen Relativitätstheorie sind diejenigen Transformationen der Raumzeit, genauer des Minkowski-Raumes, die das Pseudoskalarprodukt invariant lassen. Explizit bedeutet dies, dass Raumzeitabstände durch eine beliebige Lorentz-Transformation erhalten bleiben. Deshalb können Lorentz-Transformationen als Symmetrietransformationen der Raumzeit angesehen werden.

Auch in den hier untersuchten endlichen Raumzeiten lassen sich solche Lorentz-Transformationen definieren. Die metrische Struktur erhält die Raumzeit in diesem Model durch Anheften einer Biquadrik an jeden Punkt der Raumzeit, sodass der jeweilige Punkt der Raumzeit dieser als Zentrumspunkt dient. Um jedoch die Lorentz-Gruppe der endlichen Raumzeit zu identifizieren, muss zunächst geklärt werden, was die Automorphismen des projektiven Raumes sind. Für einen beliebigen affinen Vektorraum sind dies gerade die bijektiven linearen Abbildungen. Jede solche kann als reguläre Matrix über dem Grundkörper geschrieben werden. Die Automorphismen des projektiven Raumes sind die Abbildungen des Raumes auf sich selbst, die dessen geometrische Struktur erhalten. Auch sie lassen sich als Matrizen schreiben.

Definition 2.15. *Projetivität*
Eine bijektive Abbildung des projektiven Raumes auf sich selbst,

$$\pi : \mathbb{P}^n\mathbb{K} \longrightarrow \mathbb{P}^n\mathbb{K}, \tag{2.27}$$

die die geometrische Struktur des Raumes[14] *erhält, heißt Projektivität. Die Menge der Projektivitäten sei mit* $\mathrm{Aut}(\mathbb{P}^n\mathbb{K})$ *bezeichnet.*

Bemerkung. *Die Projektivitäten sind damit gerade diejenigen Abbildungen, die einen projektiven Raum ohne zusätzliche Struktur invariant halten. Die Menge der Projektivitäten* $\mathrm{Aut}(\mathbb{P}^n\mathbb{K})$ *wird deshalb als Symmetriegruppe des projektiven Raumes* $\mathrm{Sym}(\mathbb{P}^n\mathbb{K})$ *bezeichnet.*

Satz 2.7. *Jede Projektivität* $\pi \in \mathrm{Aut}(\mathbb{P}^n\mathbb{F}_q)$ *lässt sich als reguläre Matrix aus* $\mathbb{P}^{n\times n}\mathbb{F}_q$ *schreiben:*

$$\forall \pi \in \mathrm{Aut}(\mathbb{P}^n\mathbb{F}_q) : \exists P_\pi \in \mathbb{P}^{n\times n}\mathbb{F}_q : \mathrm{rang}(P) = n : \forall p \in \mathbb{P}^n\mathbb{F}_q : \pi(p) = P_\pi \circ p. \tag{2.28}$$

Beweis. Nach dem Fundamentalsatz der projektiven Geometrie lässt sich jede Abbildung, die Inzidenz erhält, als projektive Matrix schreiben (vgl. S. 62 aus [Ric11] und S. 24 aus [RO09]). □

[14] In dem n-dimensionalen projektiven Raum bezeichnet man diese geometrische Struktur als Inzidenz, das heißt die Lagebeziehung zwischen Punkten und (n-1)-dimensionalen Hyperebenen. Diese Lagebeziehung wird in einer sogenannten Inzidenzrelation codiert.

Bemerkung. *Dieses Resultat gilt tatsächlich nur für projektive Räume über Restklassenkörpern, also endlichen Körpern mit Ordnung einer Primzahl q. Dies liegt daran, dass es in den endlichen Körpern für Primzahlpotenzen nichttriviale Körperautomorphismen gibt, welche Projektivitäten induzieren, die sich nicht durch eine Matrix darstellen lassen (siehe S. 88 in [Ric11]).*

Wir werden im Folgenden die Menge der Projektivitäten, $\mathrm{Aut}(\mathbb{P}^n\mathbb{F}_q)$ mit der Menge der projektiven Matrizen mit vollem Rang und Einträgen in $\mathbb{F}_q$ identifizieren. Da wir uns ohnehin auf Restklassenkörper beschränken wollen, können wir zukünftig o. B. d. A. davon ausgehen, dass jede Projektivität bereits durch eine Matrix gegeben ist. Wir verzichten folglich auch auf die Unterscheidung in der Notation und bezeichnen sowohl Projektivitäten als auch projektive Matrizen mit Großbuchstaben.

Satz 2.8. *Es sei $\mathbb{P}^n\mathbb{F}_q$ n-dimensionaler projektiver Raum über dem affinen Vektorraum $\mathbb{F}_q^{n+1}$ und P eine beliebige Projektivität. Weiterhin seien p_i für $i = 1, ..., n+2$ Punkte des projektiven Raumes, sodass davon keine n+1 Punkte auf der gleichen Hyperebene liegen, oder mit anderen Worten, sodass n+1 dieser Punkte eine Basis von $\mathbb{F}_q^{n+1}$ bilden. Dann ist die Projektivität P durch ihre Werte auf den p_i, $P(p_i)$ bereits eindeutig bestimmt.*

Beweis. Siehe für einen Beweis [Ueb11] S. 93. □

Ein ähnliches Ergebnis kann auch für Quadriken gefunden werden.

Satz 2.9. *Es seien Q_M und Q_N zwei Quadriken im n-dimensionalen projektiven Raum $\mathbb{P}^n\mathbb{F}_q$, sodass $d = \binom{n+2}{2} - 1$ Punkte $p_i, ..., p_d \in Q_M \cap Q_N$ existieren, von denen keine fünf innerhalb einer Hyperebene liegen, dann gilt bereits:*

$$Q_M = Q_N \tag{2.29}$$

.

Beweis. Es seien $p_i, ..., p_d$ für $d = \binom{n+2}{2} - 1$ also Punkte die obige Bedingung erfüllen, dann definieren diese eine eindeutig bestimmte Quadrik Q (siehe hierzu [ACC91] S. 86). Da jetzt auch Q_M und Q_N diese Punkte enthalten, gilt bereits: $Q_M = Q = Q_N$. □

Invarianz der metrischen Struktur der Raumzeit unter einer Projektivität ist gerade dann gegeben, wenn die Biquadrik als Punktmenge unter der Transformation invariant bleibt. Es werden also Projektivitäten gesucht, die angewendet auf die Biquadrik, höchstens eine Permutation der Punktmenge bewirken. Später werden wir zeigen, dass dies genau dann der Fall ist, wenn die Transformationen die beiden Quadrikpaarpartner getrennt als Menge invariant lassen. Da ein eindeutiger Zusammenhang besteht, zwischen der Biquadrik als Menge und der zugehörigen, Darstellungsmatrix der symmetrischen Bilinearform, können die endlichen Lorentz-Transformationen dann äquivalent über ein Invarianthalten der symmetrischen Bilinearform, beziehungsweise der Darstellungsmatrix definiert werden. Um schließlich diese Definition zu ermöglichen, muss vorerst geklärt werden, wie symmetrische Bilinearformen oder deren Darstellungsmatrizen unter Projektivitäten transformieren.

Satz 2.10. *Transformationsverhalten von symmetrischen Bilinearformen*
Es sei $P \in \mathbb{P}^{n\times n}\mathbb{F}_q$. Weiterhin sei M die Darstellungsmatrix einer symmetrischen Bilinearform auf $\mathbb{P}^n\mathbb{F}_q$, dann transformiert M gemäß[15]*:*

$$M \longmapsto P^{-t}MP^{-1}. \tag{2.30}$$

Beweis. Vergleiche [Las14] S. 42. □

Nun lässt sich auch die endliche Lorentz-Gruppe definieren, zunächst schlicht als Menge der Lorentz-Transformationen der endlichen Raumzeit. Zu bemerken ist hier, dass die Lorentz-Transformationen im Allgemeinen stark von der jeweiligen, invariant gelassenen Biquadrik abhängen. Deshalb lassen sie sich nur lokal für den entsprechenden Zentrumspunkt definieren.

Definition 2.16. *Lorentz-Transformation*

Es sei $p_c \in \mathbb{P}^n\mathbb{F}_q$ und $\left(Q_M, Q_{\overline{M}}\right)$ die Biquadrik des Biquadrik-Feldes mit Zentrumspunkt p_c, das heißt $\beta(p_c) = \left(Q_M, Q_{\overline{M}}\right)$. Dann ist eine Lorentz-Transformation im Punkt p_c, Λ_{p_c}, eine Projektivität, die die metrische Struktur der Raumzeit, das heißt die Biquadrik in p_c, invariant lässt. Die Menge der Lorentz-Transformationen in p_c wird mit $\mathscr{L}_{p_c}$ bezeichnet. Dies ist offensichtlich eine Untermenge von $\mathrm{Aut}(\mathbb{P}^n\mathbb{F}_q)$. Oder mit anderen Worten:

$$\Lambda_{p_c} \in \mathscr{L}_{p_c} \subseteq \mathrm{Aut}(\mathbb{P}^n\mathbb{F}_q) :\Leftrightarrow \Lambda_{p_c}(Q_M) = Q_M \text{ und } \Lambda_{p_c}(Q_{\overline{M}}) = Q_{\overline{M}}. \tag{2.31}$$

Relevant für die metrische Struktur der Raumzeit ist nur die Punktmenge der entsprechenden Biquadrik, denn diese soll später der Definition eines Einheitsabstandes dienen. Wir zeigen jetzt aber, dass die Biquadrik als Punktmenge ihre beiden Quadrikpaarpartner bereits eindeutig bestimmt, denn damit ist die vorige Definition einer Biquadrik als Paar von Quadriken gerechtfertigt. Vielmehr lassen sich Lorentz-Transformationen dann auch, auf äquivalente Weise, durch ein invariant Halten der beiden Quadriken und damit der entsprechenden Matrizen definieren.

Satz 2.11. *Es seien $(Q_M, Q_{\overline{M}})$, $(Q_N, Q_{\overline{N}})$ zwei Biquadriken auf dem n-dimensionalen projektiven Raum $\mathbb{P}^n\mathbb{F}_q$, sodass gilt:*

$$Q_M \cup Q_{\overline{M}} = Q_N \cup Q_{\overline{N}} \text{ und } Q_M \neq Q_N,\ Q_{\overline{M}} \neq Q_{\overline{N}}. \tag{2.32}$$

Die Punktmengen der beiden Quadriken sind also identisch, aber die zugehörigen Darstellungsmatrizen, beziehungsweise die Quadrikpaarpartner sind verschieden. Dann gilt bereits:

$$Q_M = Q_{\overline{N}} \text{ und } Q_{\overline{M}} = Q_N. \tag{2.33}$$

Beweis. Da die Quadrikpaarpartner verschieden sind, die beiden Punktmengen aber identisch, existiert mindestens ein Punkt p_1 mit der Eigenschaft, dass

$$p_1 \in Q_M \cap Q_{\overline{N}}. \tag{2.34}$$

[15]Dieses Transformationsverhalten der symmetrischen Bilinearform M muss nicht so definiert werden, sondern wird direkt durch das Transformationsverhalten der Punkte $p \in \mathbb{P}^n\mathbb{F}_q$ induziert.

Wäre dies nicht der Fall, so würde offensichtlich gelten $Q_M \cap Q_{\overline{N}} = \emptyset$ und damit auch $Q_M \subseteq Q_N$, woraus zusammen mit der Tatsache, dass sich auf jeder Quadrik stets $\frac{1-p^n}{1-p}$ Punkte befinden bereits Gleichheit folgen würde.

Wir wählen also ein p_1 mit obiger Eigenschaft und ergänzen diesen für $d = \binom{n+2}{2} - 1$ durch $p_2, ..., p_d \in Q_{\overline{N}}$, sodass keine n+1 der p_i auf derselben Hyperebene liegen. Jetzt gibt es zwei Möglichkeiten. Sind alle der $p_i \in Q_M \cap Q_{\overline{N}}$, beziehungsweise können wir diese so auswählen, dann erfüllen die beiden Quadriken Q_M und $Q_{\overline{N}}$ die Bedingung aus Satz 2.9 und sind deshalb bereits gleich. Da die Punktmengen der Biquadriken übereinstimmen folgt damit bereits $Q_{\overline{M}} = Q_N$ und wir haben

$$(Q_M, Q_{\overline{M}}) = (Q_{\overline{N}}, Q_N). \tag{2.35}$$

Können wir andererseits die p_i unter Berücksichtigung obiger Bedingung nicht aus $Q_M \cap Q_{\overline{N}}$ auswählen, so können wir dies aus den restlichen $\frac{1-p^n}{1-p} - |Q_M \cap Q_{\overline{N}}|$ Punkten[16] von $Q_{\overline{N}}$. Die p_i befinden sich dann in $Q_{\overline{M}} \cap Q_{\overline{N}}$, denn die beiden Punktmengen der Biquadriken sind ja gleich. Jetzt erfüllen diese beiden Quadriken die Bedingung aus Satz 2.9 und wir erhalten

$$(Q_M, Q_{\overline{M}}) = (Q_N, Q_{\overline{N}}), \tag{2.36}$$

was der Annahme widerspricht und damit den Satz beweist. □

Bemerkung. *Offensichtlich lässt eine Projektivität die Punktmenge der Biquadrik genau dann invariant, wenn sie entweder die beiden Quadriken getrennt invariant hält, oder aber wenn die beiden Quadriken unter der Projektivität tauschen. Den Fall, dass die beiden Quadriken der Biquadrik Q_M und $Q_{\overline{M}}$ tauschen, wollen wir im Folgenden aus der Definition der Lorentz-Gruppe ausschließen, da fraglich ist inwieweit dieser physikalisch sinnvoll ist. Wir behalten aber in Gedanken, dass jede Lorentz-Transformation nach der jetzigen Definition der Lorentz-Gruppe, verknüpft mit einer Projektivität, die ein solches Vertauschen bewirkt, immer noch eine Lorentz-Transformation darstellt. Erlauben wir ein Tauschen, so erhalten wir also gerade doppelt so viele Lorentz-Transformationen.*

So wie die endlichen Lorentz-Transformationen bis jetzt definiert wurden, lassen sich noch keine Vorzüge der Matrizenrechnung implementieren. Unter Verwendung des eindeutigen Zusammenhangs zwischen Quadriken und Matrizen können wir die Lorentz-Gruppe jedoch auf eine zweite, äquivalente Weise definieren, um dies zu ermöglichen. Wir beweisen hierfür zunächst folgenden Satz.

Satz 2.12. *Es sei wie schon zuvor $(Q_M, Q_{\overline{M}})$ eine Biquadrik mit Darstellungsmatrizen $(M, \overline{M})$ und Zentrumspunkt p_c, dann gilt:*

$$\forall P \in \mathrm{Aut}(\mathbb{P}^n\mathbb{F}_q) : P(Q_M) = Q_M \Leftrightarrow P^{-t}MP^{-1} = M \tag{2.37}$$

und genauso für $\overline{M}$.

[16] Da wir ohnehin Raumzeiten für sehr große p betrachten wollen, ist dies möglich. Dennoch ist der Beweis als Beweisskizze zu verstehen und solte in naher Zukunft in voller Rigorosität ausformuliert werden.

Beweis. Der Beweis wird in beide Richtungen geführt.

„$\Leftarrow$“: Es gelte also $P^{-t}MP^{-1} = M$. Da P invertierbar ist, folgt auch $P^tMP = M$. Sei jetzt $p \in Q_M$ beliebig, dann gilt:

$$0 = p^tMp = p^tP^tMPp = (Pp)^tM(Pp) \;\Leftrightarrow\; Pp \in Q_M. \tag{2.38}$$

Da p beliebig gewählt war, gilt also $P(Q_M) \subseteq Q_M$ und da P bijektiv ist also insbesondere injektiv und die Mengen endlich sind, folgt Gleichheit.

„$\Rightarrow$“: Gilt umgekehrt $P(Q_M) = Q_M$, dann folgt offensichtlich:

$$\forall p \in Q_M : Pp \in Q_M \Leftrightarrow 0 = (Pp)^tM(Pp) = p^t(P^tMP)p \Leftrightarrow p \in Q_{P^tMP}. \tag{2.39}$$

Es definieren also M und P^tMP die gleiche Quadrik. Nach den beiden vorigen Sätzen folgt daraus bereits:

$$Q_{P^tMP} = Q_M \Leftrightarrow M = P^tMP \Leftrightarrow M = P^{-t}MP^{-1}. \tag{2.40}$$

Wiederholt man die Beweisführung identisch für $\overline{M}$ anstatt von M, so folgt die behauptete Aussage zusammen mit Satz 2.11. □

Es spielt also keine Rolle, ob wir die Transformationen betrachten, die die Biquadrik als Menge invariant halten, oder aber diejenigen Transformationen, die die beiden Darstellungsmatrizen unverändert lassen[17]. Dies führt schließlich zu einer äquivalenten Definition der Lorentz-Gruppe. Die Lorentz-Gruppe der endlichen Raumzeit am Punkt $p_c \in \mathbb{P}^n\mathbb{F}_q$ kann auf äquivalente Weise definiert werden als die Menge der Transformationen $\Lambda \in \mathrm{Aut}(\mathbb{P}^n\mathbb{F}_q)$, welche das Darstellungsmatrixpaar der Biquadrik invariant lassen.

Definition 2.17. *Lorentz-Gruppe*
Es sei $(Q_M, Q_{\overline{M}})$ Biquadrik mit Zentrumspunkt p_c, sowie $(M, \overline{M})$ das Paar der Darstellungsmatrizen der Biquadrik. Die Lorentz-Gruppe am Raumzeitpunkt p_c sei dann definiert als:

$$\mathscr{L}_{p_c} := \left\{ \Lambda \in \mathrm{Aut}(\mathbb{P}^n\mathbb{F}_q) \mid \Lambda^{-t}M\Lambda^{-1} = M \quad \textit{und} \quad \Lambda^{-t}\overline{M}\Lambda^{-1} = \overline{M} \right\}. \tag{2.41}$$

2.5 Struktur der Lorentz-Gruppe

Mit dieser Definition lässt sich jetzt die Struktur der Lorentz-Gruppe untersuchen. Wie schon durch den Namen angedeutet, besitzt diese offensichtlich eine innere Gruppenstruktur. Um diese zu identifizieren, muss jedoch vorerst die innere Struktur der Menge der Automorphismen des projektiven Raumes untersucht werden. Wir erinnern uns hierfür an die Definition einer projektiven Matrix. Außerdem lässt sich nach Satz 2.7 jede Projektivität als reguläre Matrix schreiben. Umgekehrt definiert jede reguläre projektive $n \times n$ Matrix

[17] Natürlich unter Ausschluss des zuvor erwähnten Tauschens.

eine Projektivität des projektiven Raumes $\mathbb{P}^n\mathbb{F}_q$. Die projektiven $n \times n$ Matrizen lassen sich nun aber durch gruppentheoretische Methoden aus der allgemeinen linearen Gruppe des zugehörigen affinen Raumes gewinnen. Hierfür sind jedoch einige weitere Konzepte der Gruppentheorie erforderlich.

Definition 2.18. *Untergruppe (vgl. S. 24 aus [Ros09])*
Es sei $(G, \circ)$ eine Gruppe. Eine Untergruppe von G ist eine Teilmenge $U \subseteq G$ sodass $(U, \circ_U)$ selbst eine Gruppe ist. $\circ_U$ bezeichnet die innere, zweistellige Verknüpfung eingeschränkt auf U[18]. Wir schreiben für U Untergruppe von G kurz: $U \leq G$, oder auch $U \subseteq G$ wenn klar ist, dass mit U und G Gruppen gemeint sind.

Satz 2.13. *Es sei wieder $(G, \circ)$ eine Gruppe. Eine nichtleere Teilmenge $U \subseteq G$ ist genau dann eine Untergruppe von G, wenn*

$$\forall a, b \in U \Rightarrow a \circ b^{-1} \in U. \tag{2.42}$$

Beweis. Es sei G eine Gruppe. Offensichtlich gilt für jede Untergruppe $U \subseteq G : \forall a, b \in U \Rightarrow a \circ b^{-1} \in U$ nach Definition der Untergruppe. Es sei also umgekehrt U eine nichtleere Untermenge von G für die (2.42) gelte. Wir zeigen, dass damit U bereits eine Gruppe ist und deshalb die Aussage folgt. Offensichtlich erbt U Assoziativität von G, denn, bis auf ein Einschränken der Menge, handelt es sich um dieselbe innere Verknüpfung. Da U nicht leer ist, existiert ein $u \in U$ und es gilt nach (2.42):

$$e = u \circ u^{-1} \in U. \tag{2.43}$$

U besitzt also ein neutrales Element und deshalb folgt wieder, unter der Annahme (2.42):

$$\forall u \in U : u^{-1} = e \circ u^{-1} \in U. \tag{2.44}$$

Damit ist U auch unter Inversenbildung abgeschlossen. Zudem folgt daraus:

$$\forall a, b \in U : a \circ b = a \circ (b^{-1})^{-1} \in U. \tag{2.45}$$

Wobei wir wieder (2.42) verwendet haben. Somit ist U selbst eine Gruppe und es gilt $U \leq G$ (vgl. hierzu [Ros09] S. 34). □

Vom Standpunkt der Gruppentheorie aus sind zwei Gruppen als gleich zu betrachten, wenn zwischen diesen ein sogenannter Gruppenisomorphismus, kurz Isomorphismus, existiert. Die beiden Gruppen werden dann als isomorph bezeichnet. Ein Isomorphismus ist ein bijektiver Homomorphismus, wobei Homomorphismus eine Abbildung zwischen den beiden Mengen bezeichnet, die die Gruppenstruktur respektiert.

Definition 2.19. *Homomorphismus (siehe [Ros09] S. 69)*
Es seien $(G, \circ_G)$ und $(H, \circ_H)$ zwei Gruppen[19], sowie $\phi : G \longrightarrow H$ eine Abbildung zwischen diesen, dann nennt man ϕ einen

[18] Auf den Index U wird zukünftig verzichtet, da die beiden Verknüpfungen bis auf ein Einschränken der Menge identisch sind.

[19] Später werden wir auch darauf verzichten Verknüpfungen verschiedener Gruppen mit einem Index zu versehen um diese zu unterschieden, denn welche Verknüpfung gemeint ist, folgt aus dem Kontext.

- *Homomorphismus, wenn* $\forall a, b \in G : \phi(a \circ_G b) = \phi(a) \circ_H \phi(b)$.
- *Epimorphismus, wenn* ϕ *ein surjektiver Homomorphismus ist.*
- *Monomorphismus, wenn* ϕ *ein injektiver Homomorphismus ist.*
- *Isomorphismus, wenn* ϕ *ein bijektiver Homomorphismus ist.*
- *Endomorphismus, wenn gilt* $H = G$.
- *Automorphismus, wenn* ϕ *ein bijektiver Endomorphismus ist.*

Satz 2.14. *Seien G, H zwei Gruppen und* $\phi : G \longrightarrow H$ *ein Homomorphismus, dann gilt:*

(i) $\phi(e_1) = e_2$, *wobei* $e_1 \in G, e_2 \in H$ *die beiden neutralen Elemente*[20] *sind.*

(ii) $\forall g \in G : \phi(g^{-1}) = \phi(g)^{-1}$.

Beweis. Es gilt für alle $g \in G : \phi(g) \circ \phi(e_1) = \phi(g \circ e_1) = \phi(g)$, damit folgt (i) aus der Eindeutigkeit des neutralen Elements. Weiterhin gilt für $g \in G : \phi(g) \circ \phi(g^{-1}) = \phi(g \circ g^{-1}) = \phi(e_1) = e_2$ und damit (ii). □

Satz 2.15. *Wieder seien* $(G, \circ_G)$ *und* $(H, \circ_H)$ *zwei Gruppen, sowie* $\phi : G \longrightarrow H$ *ein Homomorphismus, dann gilt:*

- $\mathrm{Kern}(\phi) = \big\{a \in G \mid \phi(a) = e \in H\big\} \leq G$.
- $\mathrm{Bild}(\phi) = \big\{\phi(a) \in H \mid a \in G\big\} \leq H$.

Beweis. Zunächst ist aufgrund von $\phi(e) = e \Leftrightarrow e \in \mathrm{Kern}(\phi)$ der Kern eine nichtleere Teilmenge von G . Es seien $a, b \in \mathrm{Kern}(\phi)$ dann ist

$$\phi(a \circ b^{-1}) = \phi(a) \circ \phi(b)^{-1} = e \circ e^{-1} = e \Leftrightarrow a \circ b^{-1} \in \mathrm{Kern}(\phi). \tag{2.46}$$

Damit ist der Kern eine Untergruppe von G. Auch das Bild von ϕ ist nicht leer, denn als Gruppe besitzt G zumindest ein neutrales Element, und damit ist $\phi(e) = e \in \mathrm{Bild}(\phi)$. Seien jetzt $a, b \in G$ und damit $\phi(a), \phi(b) \in \mathrm{Bild}(\phi)$, dann folgt:

$$\phi(a) \circ \phi(b)^{-1} = \phi(a) \circ \phi(b^{-1}) = \phi(a \circ b^{-1}) \in \mathrm{Bild}(\phi). \tag{2.47}$$

Es gilt also auch $\mathrm{Bild}(\phi) \leq H$ was den Satz beweist. □

Desweiteren erhalten in der Gruppentheorie spezielle Untergruppen, sogenannte Normalteiler, eine besondere Bedeutung. Normalteiler ergeben sich gerade als die Kerne von Homomorphismen. Um deren Rolle in der Gruppentheorie zu verstehen, muss jedoch zunächst ein neues Konzept eingeführt werden, die sogenannten Nebenklassen.

[20] Zukünftig werden wir auch auf diese Kennzeichnung der neutralen Elemente verzichten.

Definition 2.20. *Nebenklassen (siehe S. 28 aus [Ros09])*
Wieder sei G eine Gruppe und $H \leq G$ eine Untergruppe von G, dann definiert

$$\sim \subseteq G \times G : a \sim b :\Leftrightarrow \exists h \in H : b = a \circ h \tag{2.48}$$

eine Äquivalenzrelation auf G. Für ein beliebiges Element $a \in$ aus G besteht die Äquivalenzklasse von a aus folgenden Elementen:

$$[a]_\sim = \big\{ a \circ h \mid h \in H \big\} =: aH. \tag{2.49}$$

Diese bezeichnet man als Linksnebenklasse von a. Auf die gleiche Weise lässt sich auch die für jedes Element $a \in G$ die Rechstnebenklasse Ha definieren.

Satz 2.16. *Es sei G eine Gruppe und $H \leq G$ und $a, b \in G$ dann gilt:*

$$aH = bH \Leftrightarrow b^{-1}a \in H. \tag{2.50}$$

und genauso für Rechtsnebenklassen.

Beweis. Siehe hierfür [Ros09] S. 28. □

Definition 2.21. *Normalteiler (siehe [Ros09] S. 30)*
Sei G eine Gruppe. Eine Untergruppe von G, $H \leq G$ heißt Normalteiler, wenn für jedes Element $a \in G$ die Linksnebenklassen aH mit den Rechtsnebenklassen Ha übereinstimmen, wenn also gilt:

$$\forall a \in G : aH = Ha. \tag{2.51}$$

Wir schreiben für H ist Normalteiler von G, $H \lhd G$.

Die Definition des Normalteilers ist durch folgende Eigenschaft motiviert.

Satz 2.17. *Sei G eine Gruppe und $H \lhd G$ ein Normalteiler von G, dann kann die Menge der Nebenklassen[21] G/H mit einer inneren zweistelligen Verknüpfung*

$$\circ_{G/H} : G/H \times G/H \longrightarrow G/H, \quad (aH, bH) \longmapsto aH \circ_{G/H} bH := (ab)H \tag{2.52}$$

ausgestattet werden, sodass $(G/H, \circ_{G/H})$ selbst wieder eine Gruppe ist. Die Gruppe G/H nennt man die Faktor- oder Quotientengruppe von G nach H.

Beweis. Siehe hierfür [Ros09] S. 73. □

Zwischen Normalteilern und Homomorphismen besteht ein enger Zusammenhang, tatsächlich sind Normalteiler gerade die Kerne von Homomorphismen.

[21] Rechts- oder Linksnebenklassen, da diese für Normalteiler identisch sind.

Satz 2.18. *Ist $\phi : G \longrightarrow H$ ein Gruppenhomomorphismus, dann ist der Kern von ϕ ein Normalteiler von G:*

$$\phi : G \longrightarrow H, \quad \phi \textit{ ist Homomorphismus } \Rightarrow \mathrm{Kern}(\phi) \lhd G. \tag{2.53}$$

Ist umgekehrt $H \lhd G$, so definiert $\phi : G \longrightarrow G/H$ mit $g \longmapsto gH$ einen Epimorphismus mit $\mathrm{Kern}(\phi) = H$.

Beweis. Für die erste Aussage des Satzes betrachte [Ros09] S. 71. Weiterhin ist nach vorigem Satz ϕ offensichtlich ein Homomorphismus und surjektiv. Es sei jetzt also $H \lhd G$. Das neutrale Element von G/H ist gerade die Nebenklasse eH, wobei e neutrales Element von G ist. Es gilt für $k \in G$:

$$k \in \mathrm{Kern}(\phi) \Leftrightarrow kH = eH \Leftrightarrow e \circ k \in H \Leftrightarrow k \in H. \tag{2.54}$$

Damit gilt bereits $\mathrm{Kern}(\phi) = H$ und der Satz ist bewiesen. □

Abschließend wollen wir noch eine besondere Art Normalteiler definieren, das Zentrum einer Gruppe.

Definition 2.22. *Zentrum (vgl. [Ros09] S. 32)*
Das Zentrum $Z(G)$ einer Gruppe G ist die Menge an Elementen, die mit jedem Element aus G bezüglich der Gruppenoperation kommutieren:

$$Z(G) = \big\{ g \in G \mid \forall h \in G : gh = hg \big\}. \tag{2.55}$$

Das Zentrum ist insbesondere eine Untergruppe, denn aus der Definition folgt für eine beliebige Gruppe G:

$$\forall a, b \in Z(G) : \forall h \in G : (ab^{-1})h = (ah)b^{-1} = h(ab^{-1}) \Leftrightarrow ab^{-1} \in Z(G). \tag{2.56}$$

Satz 2.19. *Das Zentrum einer Gruppe G, Z(G), ist stets ein Normalteiler dieser Gruppe, es gilt also immer:*

$$Z(G) \lhd G. \tag{2.57}$$

Beweis. Offensichtlich gilt: $\forall g \in G : \forall h \in Z(G) : gh = hg \Leftrightarrow gH = Hg \Leftrightarrow Z(G) \lhd G$. □

Nun ist es möglich die Struktur der zuvor definierten endlichen Lorentz-Gruppe zu untersuchen. Hierfür betrachten wir zuerst deren Obermenge, die Menge der Projektivitäten, $\mathrm{Aut}(\mathbb{P}^n\mathbb{F}_q)$. Diese wurden zuvor als diejenigen projektiven $n \times n$ Matrizen[22] identifiziert, welche vollen Rang besitzen, also invertierbar sind. Es ist also

$$\mathrm{Aut}(\mathbb{P}^n\mathbb{F}_q) = \big\{ P \in \mathbb{P}^{n\times n}\mathbb{F}_q,\ \mathrm{rang}(P) = n+1 \big\}. \tag{2.58}$$

Die Menge der projektiven Matrizen mit vollem Rang kann allerdings auch direkt aus der Menge der gewöhnlichen, invertierbaren Matrizen konstruiert werden. Die Menge dieser Matrizen besitzt zusätzlich eine Gruppenstruktur mit Matrixmultiplikation als Verknüpfung. Man bezeichnet die Gruppe dieser Matrizen als allgemeine lineare Gruppe über dem Körper $\mathbb{F}_q$.

[22] An dieser Stelle sei vermerkt, dass die projektiven n × n Matrizen als gewöhnliche (n+1) × (n+1) Matrizen dargestellt werden können.

Definition 2.23. *Allgemeine lineare Gruppe*
Die n-dimensionale, allgemeine lineare Gruppe über einem Körper $\mathbb{K}$ ist die Menge, der quadratischen, invertierbaren $n \times n$ Matrizen mit Einträgen in $\mathbb{K}$ zusammen mit der Matrixmultiplikation als Gruppenoperation. Man bezeichnet sie als $GL(n, \mathbb{K})$.

$$GL(n, \mathbb{K}) := \left\{ A \in \mathbb{K}^{n \times n} \mid \exists A^{-1} \in \mathbb{K}^{n \times n} : A \circ A^{-1} = A^{-1} \circ A = \mathbb{1} \right\}. \tag{2.59}$$

Dies ist offensichtlich eine Gruppe, denn die Einheitsmatrix ist als neutrales Element in der Menge enthalten, die Assoziativität folgt aus der Assoziativät der Matrixmultiplikation als solches und für jede Matrix existiert nach Definition eine inverse Matrix. Die Automorphismen des projektiven Raumes ergeben sich dann als Quotient der (n+1)-dimensionalen, allgemeinen linearen Gruppe, bezüglich deren Zentrum.

Satz 2.20. *Das Zentrum der n-dimensionalen, allgemeinen linearen Gruppe $GL(n, \mathbb{K})$ sind gerade die skalaren Matrizen $\lambda\mathbb{1}$.*

$$Z(GL(n, \mathbb{K})) = \left\{ \lambda\mathbb{1} \mid \lambda \in \mathbb{K} \right\}. \tag{2.60}$$

Beweis. Für $A \in Z(GL(n, \mathbb{K}))$ gilt:

$$\forall B \in GL(n, \mathbb{K}) : AB = BA, \tag{2.61}$$

also dilt dies insbesondere für $I_{kj} = \mathbb{1} + E_{kj}$. E_{kj} ist hier eine sogenannte Standardmatrix. Diese lässt sich für alle $k, j \in 1, ..., n$ als Tensorprodukt von kanonischen Einheitsvektoren $e_i, (i = 1, ..., n)$ erzeugen, das heißt:

$$E_{kj} = e_k \otimes e_j, \text{ und } (E_{kj})_{r,s} = \delta_{kr}\delta_{js}. \tag{2.62}$$

Aus (2.61) folgt mit $B = I_{kj}$ für beliebige $k, j \in 1, ..., n$:

$$\begin{aligned} \forall j \in 1, ..., n : A_{j,j} = A_{1,1} \textit{ und } \forall i, j \in 1, ..., n : i \neq j : A_{i,j} = 0 \\ \Leftrightarrow A = A_{1,1}\mathbb{1}. \end{aligned} \tag{2.63}$$

Dies bedeutet $Z(GL(n, \mathbb{K})) \subseteq \left\{ \lambda\mathbb{1} \mid \lambda \in \mathbb{K} \right\}$. Umgekehrt gilt aber auch:

$$\forall \lambda \in \mathbb{K} : \forall B \in GL(n, \mathbb{k}) : \lambda\mathbb{1}B = B\lambda\mathbb{1}. \tag{2.64}$$

Damit gilt bereits Gleichheit der Mengen und die Behauptung ist bewiesen. □

Dieses Ergebnis ermöglicht nun eine präzise Definition der projektiven Automorphismen.

Definition 2.24. *Projektive lineare Gruppe*
Die Menge der Automorphismen des n-dimensionalen projektiven Raumes $\mathbb{P}^n\mathbb{F}_q$ ist gegeben durch die n-dimensionale projektive lineare Gruppe, $PGL(n, \mathbb{F}_q)$[23]. Diese Gruppe wird aus der (n+1)-dimensionalen, allgemeinen linearen Gruppe über Quotientenbildung bezüglich des Zentrums konstruiert:

$$\mathrm{Aut}(\mathbb{P}^n\mathbb{F}_q) = PGL(n, \mathbb{F}_q) = GL(n+1, \mathbb{F}_q)/Z(GL(n+1, \mathbb{F}_q)). \tag{2.65}$$

[23] Diese Gruppe kann genauso über einem beliebigen Körper $\mathbb{K}$ konstruiert werden, sie ist dann aber nicht die volle Automorphismengruppe des zugehörigen projektiven Raumes.

Bemerkung. *Da* $Z(GL(n+1,\mathbb{F}_q)) \lhd GL(n+1,\mathbb{F}_q)$ *tragen die projektiven Automorphismen also insbesondere Gruppenstruktur. Zu beachten ist hier, dass wir zuvor nach dem Fundamentalsatz der projektiven Geometrie die Automorphismen des projektiven Raumes als projektive Matrizen mit vollem Rang identifiziert haben. Zu diesem Zeitpunkt waren diese Matrizen für uns nicht mehr als eine Menge. Da wir jetzt allerdings die gleiche Menge an Matrizen durch gruppentheoretische Methoden aus der allgemeinen linearen Gruppe konstruiert haben, wird für uns deren Gruppenstruktur deutlich. Auch ist hier zu beachten, dass die Definition so gestaltet ist, dass die n-dimensionale projektive lineare Gruppe den Automorphismen des n-dimensionalen projektiven Raumes entspricht. Deshalb muss diese aus der (n+1)-dimensionalen allgemeinen linearen Gruppe konstruiert werden und kann insbesondere als Gruppe von* $(n+1)\times(n+1)$ *Matrizen dargestellt werden.*

Jetzt lässt sich auch die Struktur der endlichen Lorentz-Gruppe genauer untersuchen. Diese ist in jedem Punkt der Raumzeit eine Untergruppe der projektiven linearen Gruppe.

Satz 2.21. *In jedem Punkt der Raumzeit* $p_c \in \mathbb{P}^n\mathbb{F}_q$ *ist die Lorentz-Gruppe* $\mathscr{L}_{p_c}$ *eine Untergruppe der projektiven linearen Gruppe:*

$$\forall p_c \in \mathbb{P}^n\mathbb{F}_q : \mathscr{L}_{p_c} \leq PGL(n,\mathbb{F}_q). \tag{2.66}$$

Beweis. Sei zunächst $p_c \in \mathbb{P}^n\mathbb{F}_q$ beliebig. Offensichtlich gilt nach der Definition der endlichen Lorentz-Gruppe: $\mathscr{L}_{p_c} \subseteq PGL(n,\mathbb{F}_q)$. Es seien also $A, B \in \Lambda_{p_c}$, und $(M,\overline{M})$ die Darstellungsmatrizen der Biquadrik dann gilt:

$$A^{-t}MA^{-1} = M \text{ und } B^{-t}MB^{-1} = M. \tag{2.67}$$

Für B folgt nach beidseitiger Multiplikation mit B^t von links und B von rechts:

$$M = B^tMB = (B^{-1})^{-t}M(B^{-1})^{-1} \Rightarrow B^{-1} \in \mathscr{L}_{p_c}. \tag{2.68}$$

Jetzt folgt für AB^{-1}:

$$(AB^{-1})^{-t}M(AB^{-1})^{-1} = A^{-t}\big(B^{-t}MB^{-1}\big)A^{-1} = A^{-t}MA^{-1} = M \Rightarrow AB^{-1} \in \mathscr{L}_{p_c}. \tag{2.69}$$

Wiederholen wir die gleiche Rechnung für $\overline{M}$ dann folgt $\mathscr{L}_{p_c} \leq PGL(n,\mathbb{F}_q)$. □

Bis jetzt war die endliche Lorentz-Gruppe für jeden Punkt der Raumzeit separat definiert. Es besteht jedoch ein Zusammenhang zwischen den verschiedenen Lorentz-Gruppen. Um diesen genau beschreiben zu können, muss vorerst geklärt werden, wie eine Biquadrik zu verschiedenen Raumzeitpunkten „verschoben“ werden kann. Hierfür müssen noch einige grundlegende Eigenschaften der Projektivitäten gezeigt werden.

Satz 2.22. *Es seien* $p, \tilde{p} \in \mathbb{P}^n\mathbb{F}_q$ *beliebig, sowie* $p^*, \tilde{p}^* \in \mathbb{P}^n\mathbb{F}_q^*$*, dann existiert eine Projektivität,* $\pi \in PGL(n,\mathbb{F}_q)$ *mit folgender Eigenschaft:*

$$\pi p = \tilde{p} \textit{ und } \pi^{-t}p^* = \tilde{p}^*. \tag{2.70}$$

Beweis. Siehe hierfür [Las14] S. 50 ff. □

Wir benutzen dieses Ergebnis, indem wir für jede beliebige Biquadrik Projektivitäten auswählen, die den Zentrumspunkt der Biquadrik auf den Punkt $(0, ..., 0, 1)^t$ und gleichzeitig die gemeinsame Polare der beiden Quadriken[24] auf $(0, ..., 0, 1)^t$ abbildet.

Korollar 2.1. *Es sei $(Q_M, Q_{\overline{M}})$ eine beliebige Biquadrik mit Zentrumspunkt p_c und gemeinsamer Polare $pol_M(p_c) = pol_{\overline{M}}(p_c) =: pol_M$. Dann existiert eine Projektivität $P \in PGL(n, \mathbb{F}_q)$, sodass*

$$P^{-t} M P^{-1} = \begin{pmatrix} A & \vec{0} \\ \vec{0}^t & 1 \end{pmatrix}, \quad P^{-t} \overline{M} P^{-1} = \begin{pmatrix} \alpha A & \vec{0} \\ \vec{0}^t & 1 \end{pmatrix}, \tag{2.71}$$

wobei $A \in \mathbb{F}_q^{n \times n}$ und α eine Nichtquadratzahl aus $\mathbb{F}_q$ ist.

Beweis. Nach vorigem Satz existiert eine Projektivität $\pi \in PGL(n, \mathbb{F}_q)$, sodass

$$\pi p_c = (0, ..., 0, 1)^t, \quad \pi^{-t} pol_M = (0, ..., 0, 1)^t. \tag{2.72}$$

Da unter jeder Projektivität Inzidenz erhalten bleibt, ist πp_c Zentrumspunkt von $(Q_{\pi^{-t} M \pi^{-1}}, Q_{\pi^{-t} \overline{M} \pi^{-1}})$. Zusammen mit dem Transformationsverhalten der Polaren gilt für die Polarhyperebene von $(Q_{\pi^{-t} M \pi^{-1}}, Q_{\pi^{-t} \overline{M} \pi^{-1}})$, dem Bild der Biquadrik:

$$pol_{\pi^{-t} M \pi^{-1}}(\pi p_c) = \pi^{-t} M \pi^{-1} \pi p_c = \pi^{-t} M p_c = \pi^{-t} pol_M(p_c) = (0, ..., 0, 1)^t. \tag{2.73}$$

Somit besitzt die neue Biquadrik $(0, ..., 0, 1)^t$ als Polare und als Zentrumspunkt und entspricht damit bereits der Normalform (2.24). □

Es lässt sich als o jede Biquadrik durch eine projektive Transformation auf den sogenannten einfachen Zentrumspunkt $(\vec{0}^t, 1)^t$ und die sogenannte einfache Polare $(\vec{0}^t, 1)^t$ verschieben. Da die durch die Projektivitäten induzierten Transformationen aber insbesondere invertierbar sind, lässt sich umgekehrt auch jede beliebige Biquadrik durch ein Verschieben einer Biquadrik mit einfachem Zentrumspunkt und einfacher Polare[25] erzeugen.

Jetzt stellt sich die Frage, ob sich diese Eigenschaft auf die Lorentz-Gruppen der einzelnen Raumzeitpunkte ausdehnen lässt. Ist die Lorentz-Gruppe eines jeden Raumzeitpunktes bereits eine „verschobene“ Kopie einer ausgewählten Gruppe? Die Antwort liefert folgender Satz.

Satz 2.23. *Es sei $p \in \mathbb{P}^n \mathbb{F}_q$ beliebig und $\mathscr{L}_p$ die Lorentz-Gruppe im Punkt p, dann existiert bereits eine Biquadrik $(Q_M, Q_{\overline{M}})$ mit Darstellungsmatrizen $(M, \overline{M})$, Zentrumspunkt $p_c = (\vec{0}^t, 1)^t$ und gemeinsamer Polaren $pol_M(p_c) = pol_{\overline{M}}(p_c) = (\vec{0}^t, 1)^t$, sodass für die Lorentz-Gruppe dieser Biquadrik, $O(M, \overline{M}) := \left\{ \Lambda \in PGL(n, \mathbb{F}_q) \mid \Lambda^{-t} M \Lambda^{-1} = M \text{ und } \Lambda^{-t} \overline{M} \Lambda^{-1} = \overline{M} \right\}$[26] gilt:*

$$\mathscr{L}_p \tilde{=} O(M, \overline{M}). \tag{2.74}$$

[24] Wir haben gesehen, dass die Polare als Hyperebene und damit als dualer Vektor interpretiert werden kann.

[25] Wir bezeichen $(0, ..., 0, 1)^t$ als einfachen Zentrumspunkt, beziehungsweise als einfache Polare.

[26] Ist die Lorentz-Gruppe an einem speziellen Punkt der Raumzeit gemeint, so notieren wir diese mit $\mathscr{L}_p$, indem wir also den Punkt mit angeben. Meinen wir dagegen die Lorentz-Gruppe einer speziellen Biquadrik, so schreiben wir $O(M, \overline{M})$, geben also die Biquadrik explizit mit an.

Beweis. Zunächst zeigen wir, dass zwischen den beiden Gruppen eine Bijektion existiert, dann zeigen wir, dass diese ein Homomorphismus ist. Sei $\beta(p) = (Q_{M'}, Q_{\overline{M}'})$ die Biquadrik im Punkt p und $(M', \overline{M}')$ deren Darstellungsmatrix. Nach Korollar 2.2.1. existiert eine Projektivität $\pi \in PGL(n, \mathbb{F}_q)$, sodass für $\pi^{-t}M'\pi^{-1} = M$ gilt:

$$p_c(M) = (\vec{0}, 1)^t \text{ und } pol_M(p_c) = (\vec{0}, 1)^t. \tag{2.75}$$

und genauso für den Biquadrikpartner $\overline{M}$. Definiere nun folgende Abbildung:

$$\phi_\pi : O(M, \overline{M}) \longrightarrow \mathscr{L}_p,\ \Lambda \longmapsto \phi_\pi(\Lambda) := \pi^{-1}\Lambda\pi. \tag{2.76}$$

Die Abbildung ist wohldefiniert, denn es gilt:

$$\begin{gathered}
\Lambda \in O_M \\
\Leftrightarrow \Lambda^{-t}\overset{(-)}{M}\Lambda^{-1} = \overset{(-)}{M} \\
\Leftrightarrow \Lambda^{-t}\pi^{-t}\overset{(-)}{M}{}'\pi^{-1}\Lambda^{-1} = \pi^{-t}\overset{(-)}{M}{}'\pi^{-1} \\
\Leftrightarrow (\pi^t\Lambda^{-t}\pi^{-t})\overset{(-)}{M}{}'(\pi^{-1}\Lambda^{-1}\pi) = \overset{(-)}{M}{}' \\
\Leftrightarrow (\pi^{-1}\Lambda\pi)^{-t}\overset{(-)}{M}{}'(\pi^{-1}\Lambda\pi)^{-1} = \overset{(-)}{M}{}' \\
\Leftrightarrow \pi^{-1}\Lambda\pi \in \mathscr{L}_p.
\end{gathered} \tag{2.77}$$

Da zudem π invertierbar ist, ist ϕ_π bijektiv. Es seien jetzt $\Lambda_1, \Lambda_2 \in O_M$, dann gilt:

$$\phi_\pi(\Lambda_1\Lambda_2) = \pi^{-1}(\Lambda_1\Lambda_2)\pi = \pi^{-1}\Lambda_1\pi\pi^{-1}\Lambda_2\pi = \phi_\pi(\Lambda_1)\phi_\pi(\Lambda_2). \tag{2.78}$$

Die Abbildung erhält also die Gruppenstruktur und ist damit ein Isomorphismus, was die Aussage beweist. □

Es ist also die Lorentz-Gruppe in jedem Raumzeit Punkt isomorph zu einer Lorentz-Gruppe des Standardzentrums und der Standardpolaren. Allerdings sind diese Lorentz-Gruppen im Allgemeinen nicht identisch, es wurde an keiner Stelle gefordert, dass sich alle Biquadriken auf die gleiche Biquadrik verschieben lassen. Es existiert ja für jedes Element aus $\mathbb{F}_q^{n\times n}$ und jede Nichtquadratzahl eine Biquadrik. Noch ist aber kein Zusammenhang dieser Biquadriken ersichtlich. Es muss also, um eine Verbindung zwischen den Lorentz-Gruppen der verschiedenen Biquadriken mit einfachem Zentrum und einfacher Polaren zu enttarnen, die Menge der symmetrischen Bilinearformen über $\mathbb{F}_q^n$, beziehungsweise deren symmetrische Darstellungmatrizen, untersucht werden.

3 Symmetrische Bilinearformen in endlichen Vektorräumen

Ziel dieses Kapitels ist es, die Menge der Biquadriken mit einfachem Zentrum und einfacher Polare zu klassifizieren. Diese lassen sich gerade durch ein Paar von projektiven Matrizen der Gestalt

$$(M, \overline{M}) = \left(\begin{pmatrix} A & \vec{0} \\ \vec{0}^t & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \alpha A & \vec{0} \\ \vec{0}^t & 1 \end{pmatrix} \right) \tag{3.1}$$

beschreiben. Hierbei ist zu beachten, dass die beiden Matrizen Elemente von $PGL(n, \mathbb{F}_q)$ sind, es sich also eigentlich um Äquivalenzklassen von Matrizen bezüglich Homogenität handelt.

Die Methode zur Klassifikation dieser Matrizen funktioniert folgendermaßen: Zunächst werden die Darstellungsmatrizen symmetrischer Bilinearformen auf $\mathbb{K}$-Vektorräumen, für beliebige endliche Körper $\mathbb{K}$, untersucht. Da hier die volle Vektorraum-Struktur vorhanden ist, lassen sich insbesondere einfache Darstellungsmatrizen durch Wahl einer geeigneten Basis finden. Basiswechsel können als Multiplikation der Darstellungsmatrix mit einer Basiswechselmatrix dargestellt werden. Abschließend wird aus der Darstellungsmatrix, jetzt bezüglich der neuen Basis, durch Äquivalenzklassenbildung bezüglich Homogenität wieder eine projektive Matrix. Folgender Satz rechtfertigt diese Vorgehensweise.

Satz 3.1. *Es existiert ein surjektiver Homomorphismus*

$$\phi : GL(n+1, \mathbb{K}) \longrightarrow PGL(n, \mathbb{K}). \tag{3.2}$$

Beweis. Nach Definition ist $PGL(n, \mathbb{K}) = GL(n+1, \mathbb{K})/Z(GL(n+1, \mathbb{K}))$ und $Z(GL(n+1, \mathbb{K})) \lhd GL(n+1, \mathbb{K})$, deshalb existiert ein Epimorphismus mit den gewünschten Eigenschaften. □

Das Äquivalenzklassenbilden bezüglich Homogenität ist also ein Homomorphismus. Wir können uns deshalb ohne Beschränkung der Allgemeinheit auf die gewöhnlichen Matrizen des zugrundeliegenden affinen Raumes konzentrieren, denn es gilt:

Korollar 3.1. *Es sei $W : GL(n+1, \mathbb{K}) \longrightarrow GL(n+1, \mathbb{K}), G \longmapsto W^{-t} G W^{-1}$ ein Basiswechsel beschrieben durch die Matrix $W \in GL(n+1, \mathbb{K})$ und $\phi(W) \in PGL(N, \mathbb{K})$ die zugehörige projektive Matrix dann gilt:*

$$\phi(W^{-t} G W^{-1}) = \phi(W)^{-t} \phi(G) \phi(W)^{-1}. \tag{3.3}$$

Beweis. Folgt aus den Eigenschaften von ϕ als Homomorphismus. Zudem vertauscht ein Transponieren von W offensichtlich mit der Äquivalenzklassenbildung. □

Kennt man also die Transformation, die eine affine Matrix auf Normalform[1] bringt, lässt sich diejenige projektive Transformation, die die zugehörige projektive Matrix auf Normalform bringt einfach durch Äquivalenzklassenbildung berechnen. Wir können daher o. B. d. A. für eine gegebene Äquivalenzklasse projektiver Matrizen einen Repräsentanten auswählen und diesen als affine Matrix durch eine Basiswechseltransformation auf eine Normalform bringen. Anschließend betrachten wir die zur Basiswechseltransformation gehörige projektive Matrix. Im Folgenden werden also symmetrische Bilinearformen, oder äquivalent hierzu, die zugehörigen quadratischen Formen, eines Vektorraums über einem endlichen Körper untersucht und klassifiziert.

3.1 Diagonalisierung symmetrischer Bilinearformen und Normalform

Satz 3.2. *Es sei f eine symmetrische Bilinearform mit zugehöriger quadratischer Form q_f auf dem n-dimensionalen $\mathbb{K}$-Vektorraum V, mit $\operatorname{char}(\mathbb{K}) \neq 2$, dann existiert eine Basis $v_1, ..., v_n \in V$ von V, mit $f(v_i, v_j) = 0$ für $i \neq j$. Bezüglich dieser Basis hat die Darstellungsmatrix von f, M_f Diagonalgestalt, das heißt:*

$$M_{\phi,v} = \operatorname{diag}(q_\phi(v_1), ..., q_\phi(v_n)). \tag{3.4}$$

Beweis. Vergleiche [KB13] S. 584. □

Korollar 3.2. *Wieder sei V n-dimensionaler $\mathbb{K}$-Vektorraum und $e_1, ..., e_n \in V$ sei die kanonische Standardbasis. Weiterhin sei f symmetrische Bilinearform, $M_{f,e}$ die Darstellungsmatrix von f bezüglich der Standardbasis. Außerdem sei $v_1, ..., v_n \in V$ die Diagonalbasis von f. Dann transformiert die Darstellungsmatrix, bezüglich des Basiswechsels von der Standardbasis auf die Diagonalbasis, gemäß folgender Abbildungsvorschrift:*

$$\begin{aligned} M_{f,e} \longmapsto W^{-t} M_{f,e} W^{-1} = M_{f,v} = \operatorname{diag}(q_f(v_1), ..., q_f(v_n)), \\ \textit{wobei } \; W^{-1} = \Big(v_1, ..., v_n\Big). \end{aligned} \tag{3.5}$$

Die inverse Basiswechselmatrix W^{-1} ist also die Matrix mit den Basisvektoren $v_1, ..., v_n$ als Spaltenvektoren.

Beweis. Ausgedrückt in der Diagonalbasis von f besitzt v_i die Gestalt $v_i = (0, ...0, 1, 0, ...0)^t$ mit der 1 an i-ter Stelle, also beschreibt W^{-1} offensichtlich den Wechsel von der Diagonalbasis in die kanonische Basis. Der Rest folgt aus dem Transformationsverhalten symmetrischer Bilinearformen. □

[1] Mit Normalform ist hier eine besonderes einfache Darstellungsmatrix gemeint, welche die gleiche Bilinearform beschreibt. Die genaue Gestalt dieser Normalform soll noch präzisiert werden.

Um die Darstellungsmatrix weiter zu vereinfachen, müssen nun die $q_f(v_i) \in \mathbb{K}$ untersucht werden. Für jedes dieser Körperelemente gibt es zwei Möglichkeiten, entweder es ist eine Quadratzahl, das heißt:

$$q_f(v_i) \in \mathscr{Q}(\mathbb{K}) \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{K} : k^2 = q_f(v_1), \tag{3.6}$$

oder aber dies ist nicht der Fall und es gilt:

$$q_f(v_i) \in \bar{\mathscr{Q}}(\mathbb{K}) = \mathbb{K} \setminus \mathscr{Q}(\mathbb{K}). \tag{3.7}$$

Im Folgenden sei r die Anzahl der $q_f(v_i) \in \mathscr{Q}(\mathbb{K})$ und $s = n - r$ die Anzahl der $q_f(v_i) \in \bar{\mathscr{Q}}(\mathbb{K})$. In $\mathbb{K}^{n\times n}$ existieren sogenannte Permutationsmatrizen T_{ij}, die bei gleichzeitigem Multiplizieren von links und rechts an $M_{f,v}$, je zwei Elemente der geordneten Basis $(v_i)_{i=1,...,n}$, v_i und v_j in ihrer Reihenfolge tauschen, das heißt also auch ein Vertauschen der Reihenfolge der Diagonaleinträge von $M_{f,v}$ bewirken. Diese Matrizen haben folgende Gestalt:

$$T_{ij} = \mathbb{1} + E_{ij} + E_{ji} - E_{ii} - E_{jj} \tag{3.8}$$

und es gilt $T_{ij}^{-1} = T_{ij}^t = T_{ij}$. Es kann also o. B. d. A. angenommen werden, dass die $q_f(v_i)$ bereits so geordnet sind, dass gilt:

$$q_f(v_i) \in \begin{cases} \mathscr{Q}(\mathbb{K}) \text{ für } i \leq r \\ \bar{\mathscr{Q}}(\mathbb{K}) \text{ für } i > r \end{cases} \tag{3.9}$$

denn sonst kann diese Anordnung nach Durchführung geeigneter Transformationen, gegeben durch T_{ij}, erzielt werden.

Bemerkung. *In reellen Vektorräumen nennt man das Paar (r, s) die Signatur der Bilinearform. Sie ist nach dem Sylvester-Trägheitssatz unter jeder Basistransformation eine Invariante (siehe hierfür [KB13] S. 587 ff.). In Vektorräumen über endlichen Körpern trifft dies jedoch nicht zu.*

Für jedes der ersten r Diagonaleinträge $q_f(v_i)$ existiert ein $k_i \in \mathbb{K}$ mit der Eigenschaft, dass $k_i^2 = q_f(v_i)$ gilt. Aus diesen lassen sich jetzt die folgenden Transformationen konstruieren:

$$S_{k_i} = S_{k_i}^t = \mathbb{1} + (k_i^{-1} - 1)E_{ii} = \operatorname{diag}(1, ..., k_i^{-1}, ...1), \text{ mit } k_i^{-1} \text{ an i-ter Stelle.} \tag{3.10}$$

Die so konstruierte Transformation normiert den i-ten Eintrag von $M_{f,v}$ auf 1. Es gilt also:

$$S_{k_r}^t ... S_{k_1}^t M_{f,v} S_{k_1} ... S_{k_r} = \operatorname{diag}(1, ..., 1, q_f(v_{r+1}), ..., q_f(v_n)). \tag{3.11}$$

Die k_i entsprechen gerade den Quadratwurzeln aus den $q_f(v_i)$. Da es sich bei den restlichen Diagonaleinträgen um Nichtquadratzahlen handelt, existieren für diese natürlich keine Quadratwurzeln. Es kann allerdings eine ähnlich elegante Lösung gefunden werden. Hierfür müssen zunächst die Quadratzahlen der multiplikativen Gruppe des endlichen Körpers genauer untersucht werden.

Satz 3.3. *Es sei $\mathbb{K}$ ein endlicher Körper mit q Elementen*[2] *und $G_{\mathbb{K}}$ die multiplikative Gruppe des Körpers, dann gilt für die Quadratzahlen $\mathscr{Q}(G_{\mathbb{K}})$:*

$$|\mathscr{Q}(G_{\mathbb{K}})| = \frac{q-1}{2}. \tag{3.12}$$

Beweis. Die Abbildung $h : G_{\mathbb{K}} \longrightarrow G_{\mathbb{K}}$, mit $g \longmapsto g^2$ ist offensichtlich ein Endomorphismus, denn für $g_1, g_2 \in G_{\mathbb{K}}$ gilt:

$$(g_1g_2)^2 = (g_1g_2)(g_1g_2) = (g_1g_1)(g_2g_2) = g_1^2g_2^2. \tag{3.13}$$

Hierbei wurde verwendet, dass die multiplikative Gruppe des Körpers insbesondere kommutativ ist. Weiterhin gilt offensichtlich $\text{Bild}(h) = \mathscr{Q}(G_{\mathbb{K}})$. Die Abbildung ist jedoch nicht injektiv, aber es gilt:

$$\forall x, y \in G_{\mathbb{K}} : x^2 = y^2 \Leftrightarrow x = \pm y, \tag{3.14}$$

denn angenommen es gelte $x^2 = y^2$, dann folgt mit $y = (xx^{-1})y = x(x^{-1}y)$ und damit, da h Homomorphismus ist, auch:

$$x^2 = y^2 = [x(x^{-1}y)]^2 = x^2(x^{-1}y)^2 \Leftrightarrow (x^{-1}y)^2 = 1. \tag{3.15}$$

Für ein $g \in G_{\mathbb{K}}$ mit $g^2 = gg = 1$ ist g offensichtlich Nullstelle des Polynoms $x^2 - 1 \in P[\mathbb{K}]$. Zwei Nullstellen dieses Polynoms sind bereits gegeben durch $x = \pm 1$, denn trivialerweise ist nach der Neutralität des Einselements $1^2 = 1$, und weiterhin gilt in jedem Körper $(-1)^2 = 1$, denn:

$$(-1)^2 + (-1) = (-1)[(-1) + 1] = 0 \Leftrightarrow (-1)^2 = 1. \tag{3.16}$$

Da das Polynom Grad 2 besitzt, gibt es keine weiteren Nullstellen. Dies ist in nachfolgendem Hilfssatz 3.4 bewiesen. Demnach ist $(x^{-1}y) = \pm 1$ und damit auch $x = \pm y$.
Ist umgekehrt $x = \pm y$ dann folgt natürlich automatisch:

$$x^2 = (\pm y)^2 = (-1)^2y^2 = y^2. \tag{3.17}$$

Betrachte nun die folgende Äquivalenzrelation auf $G_{\mathbb{K}}$:

$$\sim \subseteq G_{\mathbb{K}} \times G_{\mathbb{K}} : x \sim y :\Leftrightarrow x = \pm y. \tag{3.18}$$

Dies ist tatsächlich eine Äquivalenzrelation, denn offensichtlich ist $\sim$ reflexiv, da $x = x$, symmetrisch, da aus $x = \pm y$ folgt $y = \pm x$, und transitiv, denn $x = \pm y$ und $y = \pm z$ impliziert $x = \pm z$. Definiert man nun auf der Quotientenmenge $G_{\mathbb{K}}/\sim$ folgende Abbildung:

$$\tilde{g} : G_{\mathbb{K}}/\sim \longrightarrow \mathscr{Q}(G_{\mathbb{K}}),\ [g] \longmapsto g^2, \tag{3.19}$$

dann ist nach (3.14) die so definierte Abbildung wohldefiniert und bijektiv. Außerdem gilt $|G_{\mathbb{K}}/\sim| = |G_{\mathbb{K}}|/2 = (q-1)/2$ und aus der Bijektivität von $\tilde{g}$ folgt die zu beweisende Aussage. □

[2]Da $\mathbb{K}$ hier ein beliebiger, endlicher Körper ist, kann q also auch eine Primzahlpotenz sein.

In dem Beweis des Satzes wurde folgender Hilfssatz verwendet.

Satz 3.4. *Sei $\mathbb{K}$ ein Körper und sei $P \in P[\mathbb{K}]$ Polynom vom Grad d über $\mathbb{K}$, dann besitzt P höchstens d Nullstellen.*

Beweis. Siehe hierzu [Wei09] S. 12. □

Jetzt lässt sich schließlich die Menge der Quadratzahlen der multiplikativen Gruppe des Körpers $\mathbb{K}$ genauer untersuchen.

Satz 3.5. *Es seien $G_{\mathbb{K}}$ die multiplikative Gruppe des Körpers $\mathbb{K}$, und $\mathscr{Q}(G_{\mathbb{K}})$ deren Quadratzahlen, dann gilt:*

$$\mathscr{Q}(G_{\mathbb{K}}) \lhd G_{\mathbb{K}}. \tag{3.20}$$

Beweis. Nach (3.13) kann Quadrieren durch einen Homomorphismus h beschrieben werden, mit $\mathrm{Bild}(h) = \mathscr{Q}(G_{\mathbb{K}})$ und damit ist

$$\mathscr{Q}(G_{\mathbb{K}}) = \mathrm{Bild}(h) \leq G_{\mathbb{K}}. \tag{3.21}$$

Da die multiplikative Gruppe des Körpers insbesondere abelsch ist, folgt für die Nebenklassen:

$$\forall g \in G_{\mathbb{K}} : g\mathscr{Q}(G_{\mathbb{K}}) = \mathscr{Q}(G_{\mathbb{K}})g. \tag{3.22}$$

Somit ist also $\mathscr{Q}(G_{\mathbb{K}})$ ein Normalteiler von $G_{\mathbb{K}}$ und die Aussage ist bewiesen. □

Korollar 3.3. *Mit $a \in \bar{\mathscr{Q}}(G_{\mathbb{K}})$ ist auch das zu a inverse Element eine Nichtquadratzahl.*

$$\forall a \in \bar{\mathscr{Q}}(G_{\mathbb{K}}) : a^{-1} \in \bar{\mathscr{Q}}(G_{\mathbb{K}}). \tag{3.23}$$

Beweis. Die Aussage wird durch einen Widerspruchsbeweis bewiesen: Hierfür sei $a \in \bar{\mathscr{Q}}(G_{\mathbb{K}})$ und es gelte $a^{-1} \in \mathscr{Q}(G_{\mathbb{K}})$. Da die Menge der Quadratzahlen eine Gruppe bildet folgt $a = (a^{-1})^{-1} \in \mathscr{Q}(G_{\mathbb{K}})$. Dies ist ein Widerspruch zur Annahme. Es muss also bereits $a^{-1} \notin \mathscr{Q}(G_{\mathbb{K}})$ gelten und daher nach Definition der Quadrat- und Nichtquadratzahlen $a^{-1} \in \bar{\mathscr{Q}}(G_{\mathbb{K}})$, was die Aussage beweist. □

Um das gewünschte Ergebnis zu erzielen, wird noch ein weiterer nützlicher Satz der Gruppentheorie benötigt, der sogenannte Satz von Lagrange.

Satz 3.6. *Satz von Lagrange*
Es sei G eine Gruppe und $H \leq G$. Die Anzahl der Nebenklassen von H in G wird als Index von H bezeichnet und durch $|G : H|$ abgekürzt. Dann gilt:

$$|G| = |G : H| \cdot |H|. \tag{3.24}$$

Beweis. Siehe für den Beweis [Ros09] S. 30. □

Schließlich kann jetzt folgender Satz bewiesen werden.

Satz 3.7. *In jedem Körper $\mathbb{K}$ ist das Produkt zweier Nichtquadratzahlen eine Quadratzahl, das Produkt aus einer Quadratzahl und einer Nichtquadratzahl ist stets eine Nichtquadratzahl.*

$$\forall a \in \mathscr{Q}(G_{\mathbb{K}}) : \forall b, c \in \bar{\mathscr{Q}}(G_{\mathbb{K}}) : \; ab \in \bar{\mathscr{Q}}(G_{\mathbb{K}}) \text{ und } bc \in \mathscr{Q}(G_{\mathbb{K}}). \tag{3.25}$$

Beweis. Es ist $\mathscr{Q}(G_{\mathbb{K}}) \lhd G_{\mathbb{K}}$, damit existiert der sogenannte kanonische Epimorphismus

$$\phi : G_{\mathbb{K}} \longrightarrow G_{\mathbb{K}}/(\mathscr{Q}(G_{\mathbb{K}}), \; g \longmapsto g\mathscr{Q}(G_{\mathbb{K}}). \tag{3.26}$$

Für diesen gilt: $\mathrm{Kern}(\phi) = \mathscr{Q}(G_{\mathbb{K}})$. Nach dem Satz von Lagrange folgt jetzt für die Ordnung von $G_{\mathbb{K}}/(\mathscr{Q}(G_{\mathbb{K}})$:

$$|G_{\mathbb{K}}/\mathscr{Q}(G_{\mathbb{K}})| = |G_{\mathbb{K}} : \mathscr{Q}(G_{\mathbb{K}})| = \frac{|G_{\mathbb{K}}|}{|\mathscr{Q}(G_{\mathbb{K}})|}. \tag{3.27}$$

Satz 3.3 besagt jedoch $|\mathscr{Q}(G_{\mathbb{K}})| = \frac{q-1}{2}$ und da die Gruppe der Quadratzahlen ein Element weniger besitzt als der Grundkörper $\mathbb{K}$ mit Ordnung q, also gilt $|G_{\mathbb{K}}| = q - 1$, folgt jetzt insgesamt $|G_{\mathbb{K}}/\mathscr{Q}(G_{\mathbb{K}})| = 2$, und damit bereits:

$$G_{\mathbb{K}}/\mathscr{Q}(G_{\mathbb{K}}) \stackrel{\sim}{=} \mathbb{Z}_2 = \big(\{1, -1\}, \cdot\big). \tag{3.28}$$

$G_{\mathbb{K}}/\mathscr{Q}(G_{\mathbb{K}})$ ist also isomorph zur Gruppe mit zwei Elementen[3] und kann daher mit dieser identifiziert werden. Da $\mathrm{Kern}(\phi) = \mathscr{Q}(G_{\mathbb{K}})$ gilt jetzt:

$$\forall g \in G_{\mathbb{K}}, \; g \in \begin{cases} \mathscr{Q}(G_{\mathbb{K}}) \Leftrightarrow \phi(g) = 1 \\ \bar{\mathscr{Q}}(G_{\mathbb{K}}) \Leftrightarrow \phi(g) = -1 \end{cases} \tag{3.29}$$

Nun ergibt sich für $a \in \mathscr{Q}(G_{\mathbb{K}}), \; b, c \in \bar{\mathscr{Q}}(G_{\mathbb{K}})$ aus der Definition der Multiplikation auf $\mathbb{Z}_2$

$$\begin{aligned} \phi(ab) = \phi(a)\phi(b) = 1 \cdot (-1) = (-1) \Leftrightarrow ab \in \bar{\mathscr{Q}}(G_{\mathbb{K}}), \\ \phi(bc) = \phi(b)\phi(c) = (-1) \cdot (-1) = 1 \Leftrightarrow bc \in \mathscr{Q}(G_{\mathbb{K}}). \end{aligned} \tag{3.30}$$

Da a, b und c beliebig gewählt waren, folgt die zu beweisende Aussage. □

Jetzt können wir zu vorheriger Problemstellung zurückkehren. Die Darstellungsmatrix M einer beliebigen symmetrischen Bilinearform f eines n-dimensionalen $\mathbb{K}$-Vektorraums mit zugehöriger quadratischer Form q_f war nach Wahl einer geeigneten Basis $\{v_1, ..., v_n\}$, beziehungsweise nach Durchführung der Basiswechseltransformationen, bereits von der Gestalt:

$$M = \mathrm{diag}(1, ..., 1, q_f(v_{r+1}), ..., q_f(v_n)). \tag{3.31}$$

Diese Darstellung von M existiert, da r so gewählt war, dass nach Umsortieren die ersten r Basisvektoren von der quadratischen Form auf eine Quadratzahl abgebildet werden und

[3] Die Gruppenaxiome führen dazu, dass bis auf Isomorphie nur eine Gruppe mit zwei Elementen existiert.

sich deshalb normieren lassen. Die übrigen $q_f(v_i)$ sind Nichtquadratzahlen, lassen sich also, aufgrund der Nichtexistenz der Wurzel, nicht normieren. Es können jedoch alle verbleibenden $q_f(v_i)$ auf die gleiche Nichtquadratzahl „normiert" werden.

Es sei $\alpha \in \bar{\mathscr{Q}}(G_{\mathbb{K}})$ beliebig. Außerdem sei $i \in \{r+1, ..., n\}$, $q_f(v_i) \in \bar{\mathscr{Q}}(G_{\mathbb{K}})$ und nach Korollar 3.3 damit auch $q_f(v_i)^{-1} \in \bar{\mathscr{Q}}(G_{\mathbb{K}})$. Nach Satz 3.8 ist jetzt $\alpha q_f(v_i)^{-1} \in \mathscr{Q}(G_{\mathbb{K}})$, es existiert also $\sqrt{\alpha q_f(v_i)^{-1}} \in G_{\mathbb{K}}$. Aufgrund der Kommutativität der multiplikativen Gruppe von $\mathbb{K}$ folgt:

$$\sqrt{\alpha q_f(v_i)^{-1}}\; q_f(v_i)\; \sqrt{\alpha q_f(v_i)^{-1}} = \alpha q_f(v_i)^{-1} q_f(v_i) = \alpha. \tag{3.32}$$

Definiere jetzt die Matrizen $A_i \in \mathbb{K}^{n \times n}$,

$$A_i = A_i^t = \mathbb{1} + \left(\sqrt{\alpha q_f(v_i)^{-1}} - 1\right) E_{ii}. \tag{3.33}$$

Dann gilt:

$$A_n^t ... A_{r+1}^t M A_{r+1} ... A_n = \begin{pmatrix} \mathbb{1}_r & 0 \\ 0 & \alpha \mathbb{1}_s \end{pmatrix}. \tag{3.34}$$

In reellen Vektorräumen entspricht dies der sogenannten Sylvester-Normalform, mit $\alpha = -1 \in \mathbb{R}$, da hier -1 eine Nichtquadratzahl ist. Die Sylvester-Normalform lässt sich dann nicht weiter vereinfachen. In Vektorräumen über endlichen Körpern ist dies jedoch nicht der Fall. Hier lassen sich je zwei der Nichtquadratzahlen α paarweise zu Quadratzahlen, und damit zu Einsen, transformieren. Dies ist eine Folgerung aus einer speziellen Eigenschaft der endlichen Körper.

Satz 3.8. *Es sei $\mathbb{K}$ ein beliebiger, endlicher Körper mit q Elementen*[4]*, dann lässt sich jedes Element $k \in \mathbb{K}$ als Summe von zwei Quadraten schreiben*[5]*.*

$$\forall k \in \mathbb{K} : \exists x, y \in \mathbb{K} : x^2 + y^2 = k. \tag{3.35}$$

Beweis. Es sei $k \in \mathbb{K}$ beliebig aber fest. Betrachte zunächst für dieses k die beiden Mengen

$$\begin{aligned} E &:= \left\{k - x^2 \mid x \in \mathbb{K}\right\}, \\ F &:= \left\{y^2 \mid y \in \mathbb{K}\right\}. \end{aligned} \tag{3.36}$$

In $\mathbb{K}$ existieren $\frac{p+1}{2}$ Quadratzahlen, denn es existieren $\frac{p-1}{2}$ Elemente in $\mathscr{Q}(G_{\mathbb{K}})$ und $0^2 = 0$, das heißt also:

$$|F| = |\left\{y^2 \in \mathbb{K} \mid y \in \mathbb{K}\right\}| = \frac{q+1}{2}. \tag{3.37}$$

[4] q kann hier auch eine Primzahlpotenz sein.

[5] Da hier insbesondere $0 \in \mathbb{K}$ als Quadratzahl gilt, denn $0^2 = 0$, Null allerdings kein Element der multiplikativen Gruppe des Körpers und damit auch keines der Untergruppe der Quadratzahlen ist, wird auf die übliche Notation der Quadratzahluntergruppe verzichtet.

Betrachte nun die folgende Abbildung:

$$f_k : F \longrightarrow E \quad y^2 \longmapsto (-1)y^2 + k = k - y^2. \tag{3.38}$$

Da in $\mathbb{K}$ für alle Elemente Inverse bezüglich der Addition existieren und auch $(-1)^{-1} = (-1) \in \mathbb{K}$, ist die Abbildung invertierbar, also eine Bijektion. Daher ist

$$|E| = |F| = \frac{q+1}{2}. \tag{3.39}$$

Da die beiden Mengen E und F Teilmengen des Körpers sind, es also gilt $E, F \subseteq \mathbb{K}$ ist daher auch $E \cup F \subseteq \mathbb{K}$. Weiterhin sind E und F als Teilmengen von $\mathbb{K}$ insbesondere endlich. Daher folgt für deren Mächtigkeiten:

$$\begin{aligned} |E \cup F| \; &\leq |\mathbb{K}| = q \\ \Rightarrow \; |E \cap F| = |E| + |F| - |E \cup F| \; &\geq \; \frac{q+1}{2} + \frac{q+1}{2} - p \geq 1. \end{aligned} \tag{3.40}$$

Der Schnitt der beiden Mengen ist also nicht leer. Sei nun $g \in E \cap F$, dann gilt für g:

$$\exists x, y \in \mathbb{K} : k - x^2 = g = y^2 \tag{3.41}$$

und daher folgt für diese $x, y \in \mathbb{K}$

$$k - x^2 = y^2 \Leftrightarrow k = x^2 + y^2. \tag{3.42}$$

Da $k \in \mathbb{K}$ beliebig gewählt war, folgt die Aussage. □

Mithilfe dieses Satzes lassen sich nun Transformationen T konstruieren, die je zwei der Nichtquadratzahlen α paarweise in Einsen verwandeln. Nach dem vorherigem Satz lässt sich jedes beliebige Element aus $\mathbb{K}$ als Summe zweier Quadratzahlen schreiben. Es gilt also insbesondere:

$$\exists x, y \in \mathbb{K} : x^2 + y^2 = \alpha^{-1}. \tag{3.43}$$

Betrachte jetzt für diese $x, y \in \mathbb{K}$ die folgendermaßen definierten Transformationsmatrizen:

$$T = \begin{pmatrix} x & -y \\ y & x \end{pmatrix}. \tag{3.44}$$

Dann gilt für die 2×2 Matrix $\alpha \mathbb{1}_2$:

$$T^t \alpha \mathbb{1}_2 T = \begin{pmatrix} x & y \\ -y & x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & -y \\ y & x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha(x^2+y^2) & 0 \\ 0 & \alpha(x^2+y^2) \end{pmatrix} = \mathbb{1}_2. \tag{3.45}$$

Diese 2×2 Matrix T kann nun problemlos als Untermatrix folgender $n \times n$ Transformationsmatrizen dienen. Es sei hierfür $i \in \{r+1, ..., n-1\}$. Definiere nun die Matrix:

$$T_i = \begin{pmatrix} \mathbb{1}_{i-1} & 0 & 0 \\ 0 & T & 0 \\ 0 & 0 & \mathbb{1}_{n-i-1} \end{pmatrix}, \tag{3.46}$$

dann bewirkt T_i ein Transformieren der beiden Nichtquadratzahlen α an i-ter und (i+1)-ter Stelle in zwei Einsen. So lassen sich offensichtlich, für eine gerade Anzahl an Nichtquadratzahlen, das heißt $s \in 2\mathbb{N}$, alle dieser Nichtquadratzahlen, unabhängig der Dimension n, in Einsen verwandeln. Andererseits lassen sich für $s \in 2\mathbb{N}+1$ und damit $s-1 \in \mathbb{N}$ $s-1$ der Nichtquadratzahlen in Einsen verwandeln, ein α bleibt jedoch zwingend unverändert. Diese Erkenntnis ist in folgendem Satz zusammengefasst.

Satz 3.9. *Es sei $\mathbb{K}$ endlicher Körper und V n-dimensionaler $\mathbb{K}$-Vektorraum. Weiterhin sei f symmetrische Bilinearform auf V. Dann besitzt die zugehörige Darstellungsmatrix M_f nach Wahl einer geeigneten Basis bereits eine der beiden folgenden Formen:*

$$M = \mathbb{1}_n \text{ oder } M = \begin{pmatrix} \mathbb{1}_{n-1} & 0 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}. \tag{3.47}$$

Beweis. Die Aussage des Satzes folgt unmittelbar aus den vorherigen Überlegungen. □

Korollar 3.4. *Sei V (n+1)-dimensionaler $\mathbb{F}_q$-Vektorraum mit $n \in 2\mathbb{N}$ und $M \in \mathbb{F}_q^{n+1\times n+1}$ Darstellungsmatrix einer symmetrischen Bilinearform. Außerdem sei $[M]_\sim \in \mathbb{P}\mathbb{F}_q^{n\times n}$ die zugehörige projektive Matrix[6]. Dann ist nach Wahl einer geeigneten Basis von V, beziehungsweise nach Durchführung der entsprechenden Basiswechseltransformationen, bereits*

$$M = [\mathbb{1}_n]_\sim. \tag{3.48}$$

Beweis. Nach Satz 3.9 ist o. B. d. A. bereits $M = [\mathbb{1}_n]_\sim$ oder $M = [\text{diag}(1, ..., 1, \alpha]_\sim$. Im ersten Fall ist nichts zu beweisen. Es sei also

$$M = \left[\begin{pmatrix} \mathbb{1}_n & 0 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}\right]_\sim. \tag{3.49}$$

Dann besitzt die Matrix M nach vorherigem Satz eine nichtgerade Anzahl an Nichtquadratzahlen α auf der Diagonalen, denn sonst könnte man diese ja paarweise in Einsen verwandeln. Da $\dim(V) = n+1$ ist, für eine gerade Zahl n, besitzt M eine gerade Anzahl an Einsen auf der Diagonalen. Betrachte jetzt die in (3.44) definierten Transformationsmatrizen. Da T invertierbar ist, existiert die Matrix T^{-1} und es gilt:

$$T^{-t}\mathbb{1}_2 T^{-1} = \alpha\mathbb{1}_2. \tag{3.50}$$

Benachbarte Einsen in M können also durch die Transformationen T_i^{-1}, die wie T_i definiert sind, jedoch mit T^{-1} statt T, paarweise in Nichtquadratzahlen α verwandelt werden. Da die Anzahl an Einsen geradzahlig ist, gilt nach einem Durchführen dieser Transformationen:

$$M' = [\alpha\mathbb{1}_{n+1}]_\sim = [\mathbb{1}]_\sim, \tag{3.51}$$

wobei im letzen Schritt die Definition der Homogenitäts-Äquivalenzrelation verwendet wurde. □

[6] Wir verwenden hier die Äquivalenzklassenschreibweise, da wir explizit nutzen dass die Matrizen nur bis auf skalare Vielfache bestimmt sind.

Bemerkung. *Dieses Resultat ist einer der Gründe für die Wahl eines projektiven Raumes als Raumzeitmodell. Konstruiert man eine Raumzeit mit metrischer Struktur über einem affinen Raum und verwendet für die Definition der Metrik symmetrische Bilinearformen, so stellt sich die Frage, welche Signatur die Metrik besitzen soll. Meist muss man also unter zusätzlichen Annahmen eine spezielle Signatur auswählen. Dies ist in projektiven Räumen geradzahliger Dimension nicht nötig, denn wie wir gesehen haben, gibt es hier nur eine symmetrische Bilinearform.*

3.2 Die Lorentz-Gruppe der vierdimensionalen Raumzeit

Jetzt können wir zum ursprünglichen Problem zurückkehren, nämlich der Frage des Zusammenhanges der verschiedenen Lorentz-Gruppen der einzelnen Raumzeitpunkte. Diese Frage soll nun schlussendlich beantwortet werden.

Definition 3.1. *Orthogonale Gruppe*
Es sei wie schon zuvor M die Darstellungsmatrix einer symmetrischen Bilinearform auf dem n-dimensionalen $\mathbb{K}$-Vektorraum $\mathbb{K}^n$. Die orthogonale Gruppe zu M, $O(M)$ ist die Gruppe der Automorphismen[7], die die symmetrische Bilinearform invariant lassen. In Matrixschreibweise also:

$$O(M) = \left(\left\{L \in \mathbb{K}^{n\times n} \mid L^t M L = M\right\}, \circ\right). \tag{3.52}$$

Nach dieser Definition ist ersichtlich, dass es sich hierbei tatsächlich um eine Gruppe handelt. Ist $\mathbb{K}$ zudem ein endlicher Körper, so gibt es je nach Dimension des Vektorraums sogar nur eine beziehungsweise zwei orthogonale Gruppen.

Satz 3.10. *Es sei V, n-dimensionaler $\mathbb{K}$-Vektorraum für einen beliebigen endlichen Körper $\mathbb{K}$, $n \in 2\mathbb{N}+1$ und M Darstellungsmatrix einer symmetrischen Bilinearform auf V. Dann ist die orthogonale Gruppe der symmetrischen Bilinearform M, $O(M)$ bereits isomorph zur orthogonalen Gruppe $O(\mathbb{1})$.*

$$\forall n \in \mathbb{N}+1 : \forall M \in \left\{A \in \mathbb{K}^{n\times n} \mid \mathrm{rang}(A) = n,\ A^t = A\right\} : O(M) \hat{=} O(\mathbb{1}). \tag{3.53}$$

Beweis. Es sei zunächst $n \in 2\mathbb{N}+1$ beliebig. Weiterhin sei $M \in \left\{A \in \mathbb{K}^{n\times n} \mid \mathrm{rang}(A) = n,\ A^t = A\right\}$ die Darstellungsmatrix einer beliebigen symmetrischen Bilinearform. Nach den vorherigen Argumenten existieren Basiswechselmatrizen $B_1, ..., B_d$, sodass mit $B := B_1 ... B_d$,

$$B^t M B = \begin{pmatrix} \mathbb{1}_r & 0 \\ 0 & \alpha\mathbb{1}_s \end{pmatrix} =: D_s, \tag{3.54}$$

[7] Für einen Vektorraum bestehen die Automorphismen gerade aus den invertierbaren, linearen Abbildungen. Eine Abbildung f bezeichnet man als linear, wenn für alle Vektoren a, b und Skalare λ gilt: $f(a + \lambda b) = f(a) + \lambda f(b)$.

wobei $r + s = n$ gilt. B ist als Basiswechselmatrix insbesondere invertierbar, daher lässt sich folgende Abbildung definieren.

$$\phi_B : O(M) \longrightarrow O(D_s),\ L \longmapsto \phi_B(L) := B^{-1}LB. \tag{3.55}$$

Wir zeigen nun zunächst, dass es sich bei der Abbildung um einen Isomorphismus zwischen den beiden orthogonalen Gruppen handelt. Da nun gilt $B^tMB = D_s \Leftrightarrow M = B^{-t}D_sB^{-1}$, folgt für $L \in O(M)$:

$$\begin{aligned} L \in O(M) &\Leftrightarrow L^tML = M \Leftrightarrow L^tB^{-t}D_sB^{-1}L = B^{-t}D_sB^{-1} \\ &\Leftrightarrow (B^{-1}LB)^tD_s(B^{-1}LB) = D_s \Leftrightarrow B^{-1}LB \in O(D_s). \end{aligned} \tag{3.56}$$

Damit ist gezeigt, dass die Abbildung tatsächlich wohldefiniert ist. Zusammen mit der Invertierbarkeit der Basiswechseltransformation B folgt bereits die Bijektivität der Abbildung. Es ist allerdings noch zu zeigen, dass ϕ_B ein Homomorphismus ist. Dies funktioniert analog zu Gleichung (2.78) auf Seite 30. Es seien also $L_1, L_2 \in O(M)$, dann gilt:

$$\phi_B(L_1L_2) = B^{-1}(L_1L_2)B = B^{-1}L_1BB^{-1}L_2B = \phi_B(L_1)\phi_B(L_2). \tag{3.57}$$

Damit ist ϕ_B ein Isomorphismus und es gilt $O(M)\cong O(D_s)$. Für D_s bestehen nun zwei Möglichkeiten. Entweder ist r, die Anzahl der Nichtquadratzahlen α, eine gerade oder eine ungerade Zahl. Sei zunächst $r \in 2\mathbb{N}$. Dann existieren nach (3.44) Transformationsmatrizen $T_{r+1}, ..., T_{n-1}$, sodass mit $T := T_{r+1}...T_{n-1}$ gilt:

$$T^tD_sT = \mathbb{1}_n. \tag{3.58}$$

Definiere nun wieder die Abbildung

$$\phi_T : O(D_s) \longrightarrow O(\mathbb{1}),\ L \longmapsto T^{-1}LT. \tag{3.59}$$

Nach der gleichen Argumentation wie zuvor, also nach (2.78), ist ϕ_T ein Isomorphismus. Betrachte nun die Verkettung, also die Hintereinanderausführung der beiden gefundenen Isomorphismen, das heißt die Abbildung

$$\phi_T \circ \phi_B : O(M) \longrightarrow O(\mathbb{1}),\ L \longmapsto \phi_T \circ \phi_B(L) = \phi_T(\phi_B(L)). \tag{3.60}$$

Da die beiden Abbildungen invertierbar sind, existiert offensichtlich auch die inverse Abbildung $(\phi_T \circ \phi_B)^{-1} = \phi_B^{-1} \circ \phi_T^{-1}$. Zudem folgt aus der Tatsache, dass beide Abbildungen Homomorphismen sind für $L_1, L_2 \in O(M)$[8]:

$$\phi_T \circ \phi_B(L_1L_2) = \phi_T(\phi_B(L_1L_2)) = \phi_T(\phi_B(L_2)\phi_B(L_2)) = (\phi_T \circ \phi_B(L_1))(\phi_T \circ \phi_B(L_2)) \tag{3.61}$$

Daher ist $\phi_T \circ \phi_B$ der gesuchte Isomorphismus zwischen $O(M)$ und $O(\mathbb{1})$.
Sei andererseits $s \in 2\mathbb{N} + 1$, also ungerade, dann ist, da auch n ungerade ist, $r = n - s \in$

[8] Damit ist insbesondere gezeigt, dass Isomorphie eine transitive Eigenschaft ist.

$2\mathbb{N}$, also gerade. Jetzt existiert, da die T^{-1} invertierbar sind, mit $T_1^{-1}...T_{r-1}^{-1} =: R$ eine Transformation, für die gilt:

$$R^t D_s R = \alpha \mathbb{1}, \tag{3.62}$$

und wie schon zuvor definiert die Abbildung

$$\phi_R : O(D_s) \longrightarrow O(\alpha \mathbb{1}),\ L \longmapsto R^{-1} L R \tag{3.63}$$

einen Isomorphismus zwischen den beiden orthogonalen Gruppen. Die Verkettung $\phi_R \circ \phi_B$ ist dann ein Isomorphismus zwischen $O(M)$ und $O(\alpha\mathbb{1})$, das heißt es gilt:

$$O(M) \hat{=} O(\alpha \mathbb{1}). \tag{3.64}$$

Allerdings gilt für $L \in O(\alpha\mathbb{1})$:

$$L^t \alpha \mathbb{1} L = \alpha \mathbb{1} \Leftrightarrow \alpha(L^t \mathbb{1} L) = \alpha \mathbb{1} \Leftrightarrow L^t \mathbb{1} L = \mathbb{1}. \tag{3.65}$$

Die beiden Gruppen $O(M)$ und $O(\alpha\mathbb{1})$ sind also identisch und die Aussage damit bewiesen. □

Wir haben also gezeigt, dass es in ungeraden Dimensionen bis auf Isomorphie nur eine orthogonale Gruppe gibt. Im Gegensatz dazu gibt es in geraden Dimensionen, abhängig von der symmetrischen Bilinearform, zwei nicht isomorphe orthogonale Gruppen. Dies liegt daran, dass eine unter Basiswechsel invariante Größe für symmetrische Bilinearformen existiert, der sogenannte Witt-Index.

Definition 3.2. *Total isotroper Unterraum (siehe [Wil09] S. 54)*
Es sei (V, f) ein quadratischer Raum, das heißt V sei ein Vektorraum ausgestattet mit einer quadratischen Form f. Weiterhin sei $U \subseteq V$ ein Unterraum von V, dann heißt U total isotrop, wenn gilt:

$$\forall u \in U : f(u) = 0. \tag{3.66}$$

Satz 3.11. *Es sei wieder (V, f) ein quadratischer Raum, wobei V ein Vektorraum über einem endlichen Körper $\mathbb{K}$ mit $\mathrm{char}(\mathbb{K}) \neq 2$, sowie f eine nicht ausgeartete, quadratische Form ist. Dann ist die Dimension eines maximalen, total isotropen Unterraumes eine Invariante unter der Wirkung[9] der allgemeinen linearen Gruppe $GL(\dim(V), \mathbb{K})$. Diese wird auch als Witt-Index der quadratischen Form f bezeichnet.*

Beweis. Siehe für den Beweis [Wil09] S. 57 ff. □

Bemerkung. *Für den uns interessierenden Fall $\dim(V) = 2m, m > 0$ bezeichnen wir die quadratische Form im Folgenden als Form vom plus-Typen, wenn sie Witt-Index m besitzt und als Form vom minus-Typen, wenn dies nicht der Fall ist.*

[9] Siehe für die Definition der Wirkung einer Gruppe Definition6.1.

Satz 3.12. *Es sei V 2m-dimensionaler $\mathbb{K}$ Vektorraum für einen beliebigen endlichen Körper $\mathbb{K}$ und ein $m \in \mathbb{N}$, weiterhin sei f eine nicht ausgeartete, symmetrische Bilinearform auf V, dann ist die zu f gehörige orthogonale Gruppe $O(f)$ isomorph zu einer der beiden Gruppen O^+_{2m}, oder O^-_{2m}. Diese sind jedoch nicht isomorph zueinander.*

Beweis. Folgt direkt daraus, dass in geraden Dimensionen die symmetrischen Bilinearformen f und αf äquivalent sind[10], da ja ein Basiswechsel existiert, der die gerade Anzahl an Nichtquadratzahlen α paarweise in Quadratzahlen wandelt. Der Witt-Index bleibt aber durch jeden Basiswechsel erhalten. Die beiden nicht-isomorphen orthogonalen Gruppen werden also danach unterschieden, ob die zugehörige Form vom plus- oder minus-Typen ist. Der Beweis und die zugehörigen Überlegungen sind genauer nachzulesen in ([Wil09] S. 69 ff.). □

Bemerkung. *Ob eine gegebene symmetrische Bilinearform f vom plus- oder minus-Typen ist, hängt im Allgemeinen neben der Form selbst von der Dimension des Vektorraumes, sowie der Ordnung des zugrundeliegenden endlichen Körpers ab. Allerdings besitzt in 2m Dimensionen, für gerades m, die Form mit Darstellungsmatrix $\mathbb{1}_{2m}$ stets Witt-Index m, und gehört daher dem plus-Typen an (siehe [Wil09] S. 58). Insbesondere ist also $O(\mathbb{1}_4) \tilde{=} O^+_4$. Im Folgenden schreiben wir für diese Gruppe auch kurz O_4.*

Jetzt wollen wir uns wieder den Biquadriken in endlichen projektiven Räumen zuwenden. Die so konstruierte Raumzeit erhielt ihre metrische Struktur durch ein Ausstatten mit dem Biquadrik-Feld, es wurde also in jedem Raumzeitpunkt ein Quadrikpaar angeheftet. Wir hatten gesehen, dass dadurch in jedem Raumzeitpunkt eine eigene Lorentz-Gruppe angeheftet werden musste, da diese im Allgemeinen stark von der jeweiligen Biquadrik abzuhängen schienen. Eine Transformation, die die metrische Struktur in einem Punkt invariant lässt, verändert diese also gegebenenfalls in anderen Punkten der Raumzeit. Allerdings konnte gezeigt werden, dass jede dieser Lorentz-Gruppen der verschiedenen Raumzeitpunkte bereits isomorph zu einer Lorentz-Gruppe des Zentrumspunktes $(\vec{0}^t, 1)^t$ mit einfacher Polaren ist. Im folgenden Satz soll nun ein weiterer Zusammenhang der einzelnen Lorentz-Gruppen bewiesen werden. Tatsächlich ist die Lorentz-Gruppe eines jeden Raumzeitpunktes bereits eine isomorphe Kopie einer „Standard-Lorentz-Gruppe“.

Satz 3.13. *Es sei $\mathbb{P}^4\mathbb{F}_q$ vierdimensionaler projektiver Raum über einem endlichen Körper $\mathbb{F}_q$, ausgestattet mit dem zuvor definierten Biquadrik-Feld β, und $p \in \mathbb{P}^4\mathbb{F}_q$ beliebig, dann ist die Lorentz-Gruppe am Punkt p bereits isomorph zur vierdimensionalen Standard-Lorentz-Gruppe[11] O_4.*

$$\forall p \in \mathbb{P}^4\mathbb{F}_q : \mathscr{L}_p \tilde{=} O_4. \tag{3.67}$$

[10] In ungeradzahliger Dimension sind diese beiden Formen nicht äquivalent und besitzen insbesondere nicht den gleichen Witt-Index. Da aber beide Formen durch die gleichen Transformationen invariant gehalten werden, sind die zugehörigen orthogonalen Gruppen O^+ und O^- identisch und es existiert nur eine orthogonale Gruppe.

[11] Wir schreiben deshalb auch $\mathscr{L}$ statt O_4 wenn wir explizit die Wirkung der orthogonalen Gruppe als Automorphismen auf der projektiven Raumzeit meinen.

Beweis. Es sei also $p \in \mathbb{P}^4\mathbb{F}_q$ beliebig und $\beta(p) = \left(Q_M, Q_{\overline{M}}\right)$ die Biquadrik in p und $\mathscr{L}_p$ die Lorentz-Gruppe in p. Nach Satz 2.23 ist $\mathscr{L}_p$ isomorph zu einer Lorentz-Gruppe einer Biquadrik mit einfachem Zentrumspunkt und einfacher Polarer. Da nach Gleichung (3.61) Isomorphie eine transitive Eigenschaft ist kann o. B. d. A. vorausgesetzt werden, dass $\beta(p)$ bereits einfachen Zentrumspunkt und einfache Polare besitzt, also für die Darstellungsmatrizen gilt:

$$\left(M, \overline{M}\right) = \left(\begin{pmatrix} A & \vec{0} \\ \vec{0}^t & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \alpha' A & \vec{0} \\ \vec{0}^t & 1 \end{pmatrix}\right), \tag{3.68}$$

mit einem $A \in \mathbb{F}_q^{4\times 4}$ mit $\operatorname{rang}(A) = 4$ und $A^t = A$. Für A gibt es jetzt nach den vorherigen Sätzen und Argumenten zwei Möglichkeiten. Entweder es existiert eine invertierbare Matrix $B \in \mathbb{F}_q^{4\times 4}$, sodass[12]

$$B^t A B = \mathbb{1}_4 \Rightarrow \begin{pmatrix} B & \vec{0} \\ \vec{0}^t & 1 \end{pmatrix}^t M \begin{pmatrix} B & \vec{0} \\ \vec{0}^t & 1 \end{pmatrix} = \mathbb{1}_5. \tag{3.69}$$

Damit folgt für den Quadrikpaarpartner:

$$B^t \alpha' A B = \alpha' B^t A B = \alpha' \mathbb{1}_4 \Rightarrow \begin{pmatrix} B & \vec{0} \\ \vec{0}^t & 1 \end{pmatrix}^t \overline{M} \begin{pmatrix} B & \vec{0} \\ \vec{0}^t & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha' \mathbb{1}_4 & \vec{0} \\ \vec{0}^t & 1 \end{pmatrix}. \tag{3.70}$$

Definiere nun wie schon zuvor $O_{\mathbb{1}_5,\alpha'}$ als die Lorentz-Gruppe der so entstandenen Biquadrik, also

$$O_{\mathbb{1}_5,\alpha'} := \left(\left\{L \in \mathbb{P}^{4\times 4}\mathbb{F}_q \mid L^t \mathbb{1}_5 L = \mathbb{1}_5 \text{ und } L^t \begin{pmatrix} \alpha' \mathbb{1}_4 & \vec{0} \\ \vec{0}^t & 1 \end{pmatrix} L = \begin{pmatrix} \alpha' \mathbb{1}_4 & \vec{0} \\ \vec{0}^t & 1 \end{pmatrix}\right\}, \circ\right). \tag{3.71}$$

Mit der gleichen Rechnung wie in (2.78) auf Seite 30 und (3.55) auf Seite 41 lässt sich jetzt zeigen, dass die Abbildung

$$\phi_B : \mathscr{L}_p \longrightarrow O_{\mathbb{1}_5,\alpha'}, \quad \Lambda \longmapsto \phi_B(\Lambda) := B^{-1}\Lambda B \tag{3.72}$$

ein Gruppenisomorphismus ist. Für diesen Fall ist also gezeigt, dass $\mathscr{L}_p \tilde{=} O_{\mathbb{1}_5,\alpha'}$.

Existiert andererseits die Matrix B mit den gewünschten Eigenschaften nicht, so gibt es wieder nach vorherigen Argumenten, eine invertierbare Transformationsmatrix $\tilde{B} \in \mathbb{F}_q^{4\times 4}$ mit

$$\tilde{B}^t A \tilde{B} = \begin{pmatrix} \mathbb{1}_3 & \vec{0} \\ \vec{0}^t & \alpha \end{pmatrix}. \tag{3.73}$$

[12] An dieser Stelle sei vermerkt, dass es sich bei den 5×5 Matrizen um projektive Matrizen handelt. Diese sind also eigentlich Äquivalenzklassen bezüglich Homogenität. Um die Notation zu vereinfachen verzichten wir jedoch auf die Äquivalenzklassenschreibweise, beachten aber, dass die Matrizen nur bis auf skalare Vielfache bestimmt sind. Die Untermatrizen jedoch sind gewöhnliche Matrizen, da Homogenität nur für die gesamte Matrix gilt.

Zu beachten ist hier, dass es solch eine Transformation $\tilde{B}$ nach der Konstruktion und Satz 3.8 für jede beliebige Nichtquadratzahl α gibt, also insbesondere auch für $\alpha = (\alpha')^{-1}$, denn da α' Nichtquadratzahl ist, ist nach Korollar 3.3 auch das zugehörige inverse Element eine Nichtquadratzahl. Damit folgt:

$$\begin{pmatrix} \tilde{B} & \vec{0} \\ \vec{0}^t & 1 \end{pmatrix}^t M \begin{pmatrix} \tilde{B} & \vec{0} \\ \vec{0}^t & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbb{1}_3 & & \\ & (\alpha')^{-1} & \\ & & 1 \end{pmatrix} =: M'. \tag{3.74}$$

Wendet man jetzt die gleiche Transformation auf den Quadrikpaarpartner $\overline{M}$ an, so erhält man:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \tilde{B} & \vec{0} \\ \vec{0}^t & 1 \end{pmatrix}^t \overline{M} \begin{pmatrix} \tilde{B} & \vec{0} \\ \vec{0}^t & 1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \alpha' \begin{pmatrix} \mathbb{1}_3 & \vec{0} \\ \vec{0}^t & (\alpha')^{-1} \end{pmatrix} & \\ & 1 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} \alpha'\mathbb{1}_3 & \\ & \mathbb{1}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbb{1}_3 & \\ & (\alpha')^{-1}\mathbb{1}_2 \end{pmatrix} =: \overline{M}', \end{aligned} \tag{3.75}$$

wobei für die gesamte Rechnung jeweils die leeren Einträge der Matrizen mit Nullen zu füllen sind. Im letzten Schritt wurde verwendet, dass die Matrizen nur bis auf skalare Vielfache bestimmt sind. Sei jetzt wieder T^{-1} die Matrix aus (3.50), diesmal jedoch für α'. Es gilt also $T^{-t}\mathbb{1}_2 T^{-1} = \alpha'\mathbb{1}_2$. Damit folgt:

$$\begin{pmatrix} \mathbb{1}_3 & \\ & T^{-1} \end{pmatrix}^t M' \begin{pmatrix} \mathbb{1}_3 & \\ & T^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbb{1}_4 & \vec{0} \\ \vec{0}^t & \alpha' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\alpha')^{-1}\mathbb{1}_4 & \vec{0} \\ \vec{0}^t & 1 \end{pmatrix} := M'' \tag{3.76}$$

und für den Quadrikpaarpartner $\overline{M}'$ ergibt sich:

$$\begin{pmatrix} \mathbb{1}_3 & \\ & T^{-1} \end{pmatrix}^t \overline{M}' \begin{pmatrix} \mathbb{1}_3 & \\ & T^{-1} \end{pmatrix} = \mathbb{1}_5. \tag{3.77}$$

Sei jetzt D die Verkettung, also das Matrixprodukt der Transformatinsmatrizen die M auf M'' und $\overline{M}$ auf $\mathbb{1}_5$ abbilden, dann definiert nach der gleichen Rechnung wie zuvor die Abbildung

$$\phi_D : \mathscr{L}_p \longrightarrow O_{\mathbb{1}_5,(\alpha')^{-1}}, \ \Lambda \longmapsto D^{-1}\Lambda D \tag{3.78}$$

einen Isomorphismus zwischen den beiden Gruppen, und es ist $\mathscr{L}_p \tilde{=} O_{\mathbb{1}_5,(\alpha')^{-1}}$.

Um den Beweis zu vollenden müssen wir noch zeigen, dass für eine beliebige Nichtquadratzahl α die Gruppe $O_{\mathbb{1}_5,\alpha}$ isomorph zur vierdimensionalen orthogonalen Gruppe O_4 ist. Im Folgenden soll gezeigt werden, dass dies bereits für jede beliebige Zahl $q \in \mathbb{F}_q : q \neq 1$ gilt, und daher insbesondere für jede Nichtquadratzahl. Es sei hierfür $\Lambda \in O_{\mathbb{1}_5,\alpha}$ wobei $1 \neq \alpha \in \mathbb{F}_q$ eine beliebige Nichtquadratzahl ist. Dann gilt offensichtlich:

$$\Lambda^t \mathbb{1}_5 \Lambda = \mathbb{1} \text{ und } \Lambda^t \begin{pmatrix} \alpha\mathbb{1}_4 & \\ & 1 \end{pmatrix} \Lambda = \begin{pmatrix} \alpha\mathbb{1}_4 & \\ & 1 \end{pmatrix}. \tag{3.79}$$

Aus der ersten Bedingung folgt $\Lambda^{-1} = \Lambda^t \Leftrightarrow \Lambda^{-t} = \Lambda$ und damit auch:

$$\begin{pmatrix} \alpha\mathbb{1}_4 & \\ & 1 \end{pmatrix} \Lambda = \Lambda \begin{pmatrix} \alpha\mathbb{1}_4 & \\ & 1 \end{pmatrix}. \tag{3.80}$$

Λ lässt sich jetzt explizit als Matrix darstellen. Es gelte also:

$$\Lambda = \begin{pmatrix} C & \vec{x} \\ \vec{y}^t & z \end{pmatrix}. \tag{3.81}$$

Aus Gleichung (3.80) folgt jetzt zusammen mit der Komponentenschreibweise von Λ:

$$\begin{pmatrix} \alpha C & \alpha\vec{x} \\ \vec{y}^t & z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha\mathbb{1}_4 & \\ & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C & \vec{x} \\ \vec{y}^t & z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C & \vec{x} \\ \vec{y}^t & z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha\mathbb{1}_4 & \\ & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha C & \vec{x} \\ \alpha\vec{y}^t & z \end{pmatrix}, \tag{3.82}$$

Woraus durch Vergleich der Komponenten von der beiden Matrizen, da α als Nichtquadratzahl ungleich 1 ist, folgt

$$\begin{aligned} \vec{x} &= \alpha\vec{x} \Leftrightarrow \vec{x} = 0, \\ \vec{y} &= \alpha\vec{y} \Leftrightarrow \vec{y} = 0. \end{aligned} \tag{3.83}$$

Daher ist Λ bereits von der Gestalt

$$\Lambda = \begin{pmatrix} C & 0 \\ 0 & z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{C} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \tag{3.84}$$

wobei wieder die Tatsache verwendet wurde, dass die projektive Matrix nur bis auf skalare Vielfache bestimmt ist, sowie $\tilde{C} = \frac{1}{z}C$ ist. Jetzt kann zusätzlich die erste Bedingung aus (3.79) verwendet werden. Damit folgt für C:

$$\mathbb{1}_5 = \Lambda^t\Lambda = \begin{pmatrix} \tilde{C}^t & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{C} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \tilde{C}^t\tilde{C} = \mathbb{1}_4. \tag{3.85}$$

Umgekehrt ist die Matrix

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \tilde{C} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{3.86}$$

für alle $\tilde{C}$ mit $\tilde{C}^t\tilde{C} = \mathbb{1}_4$ ein Element aus $O_{\mathbb{1}_5,\alpha}$. Es gilt also:

$$O_{\mathbb{1}_5,\alpha} = \left(\left\{ \begin{pmatrix} \tilde{C} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{P}^{4\times4}\mathbb{F}_q \mid \tilde{C}^t\tilde{C} = \mathbb{1}_4 \right\}, \circ \right). \tag{3.87}$$

Jetzt ist zudem, aufgrund der Blockdiagonalgestalt der Elemente von $O_{\mathbb{1}_5,\alpha}$, die folgende Abbildung ein Gruppenisomorphismus:

$$f : O(\mathbb{1}_4) \longrightarrow O_{\mathbb{1}_5,\alpha}\ \tilde{C} \longmapsto \begin{pmatrix} \tilde{C} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{3.88}$$

Dass dies ein Isomorphismus ist, ist offensichtlich. Damit ist schließlich gezeigt, dass für alle $\alpha \in \mathbb{F}_q$ ungleich 1, also insbesondere auch für alle Nichtquadratzahlen, $O_{\mathbb{1}_5,\alpha}$ isomorph zu $O(\mathbb{1}_4)$ ist. Damit ergibt sich insgesamt aufgrund der Transitivität der Isomorphie $\mathscr{L}_p \tilde{=} O(\mathbb{1}_4)$, was die Aussage beweist. □

Bemerkung. *Ist die Darstellungsmatrix A also von der Form $A = \mathrm{diag}(1, 1, 1, \alpha)$ und ist damit nach der Klassifizierung aus (3.2) auf Seite 42 vom minus-Typen, so lässt sich die Darstellungsmatrix M der zugehörigen Quadrik zwar nicht auf die Einheitsmatrix abbilden, allerdings ist dies dann für deren Partner $\overline{M}$ möglich. Damit tauschen die Darstellungsmatrizen der beiden Quadriken M und $\overline{M}$ in gewisser Weise ihre Rollen gegenüber dem vorherigen Fall. Hier wäre sicherlich eine Interpretation aus physikalischer Sicht interessant. Womöglich kann so auch die Normalform einer Biquadrik mit Standardzentrum aus Satz 2.24 besser verstanden werden.*

Da jeder Punkt der Raumzeit, durch das Biquadrik-Feld, mit einer eigenen Biquadrik ausgestattet wird, und diese im Allgemeinen verschieden sind, ist es zunächst nötig für jeden Punkt der Raumzeit eine separate Lorentz-Gruppe $\mathscr{L}_p$ zu definieren. Mit diesem Satz ist jedoch gezeigt, dass alle diese Lorentz-Gruppen bereits isomorph zur nicht-projektiven, vierdimensionalen orthogonalen Gruppe O_4 sind. Daher kann diese als eigentliche Lorentz-Gruppe der so konstruierten Raumzeit angesehen werden. In jedem Raumzeitpunkt befindet sich eine zu O_4 isomorphe Gruppe, welche sich aus dieser durch Anwendung der zuvor beschriebenen Transformationen erzeugen lässt. Es ist also in jedem Punkt der Raumzeit eine isomorphe Kopie von O_4, der eigentlichen Lorentz-Gruppe, angeheftet. Damit besitzt die endliche projektive Raumzeittheorie eine lokale Invarianz unter dieser Lorentz-Gruppe.

4 Zerlegung der endlichen Lorentz-Gruppe

Mit den vorherigen Überlegungen ist die Gruppe der Lorentz-Transformationen der zuvor konstruierten endlichen Raumzeit identifiziert. Diese ist gerade die Gruppe O_4, deren Elemente orthogonale linearen Transformationen des vierdimensionalen affinen Raumes über dem endlichen Körper $\mathbb{F}_q$ sind. Wünschenswert wäre es jedoch, aus der abstrakten Untersuchung der Lorentz-Transformationen eine, der praktischen Anwendung zuträgliche, konkrete Matrixdarstellung dieser zu gewinnen. So könnte dann beispielsweise auch die Ordnung der Lorentz-Gruppe bestimmt werden. Es soll also eine Art Normalform der Lorentz-Transformationen der endlichen Raumzeit gefunden werden, wie dies aus der speziellen Relativitätstheorie bekannt ist. Deshalb sollen im folgenden Kapitel orthogonale Gruppen über endlichen Körpern $\mathbb{K}$ untersucht werden.

4.1 Der Fall in zwei Dimensionen

Eine solche Normalform lässt sich für den Spezialfall einer zweidimensionalen[1] Raumzeit problemlos finden. Um dies zu erreichen, muss das aus der Orthogonalität der Transformationen entstehende Gleichungssystem gelöst werden. Es gilt[2]:

$$L \in O(\mathbb{1}_2) \Leftrightarrow L^t \mathbb{1}_2 L = \mathbb{1}_2. \tag{4.1}$$

Diese Bedingung lässt sich nun in Komponentenschreibweise übertragen, indem wie zuvor die Lorentz-Transformation als invertierbare Matrix geschrieben wird. Für den Fall einer zweidimensionalen Raumzeit lässt sich das entstehende Gleichungssystem lösen und es ergibt sich:

$$L^t \mathbb{1}_2 L = \mathbb{1}_2 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L_1 & L_3 \\ L_2 & L_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} L_1 & L_2 \\ L_3 & L_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L_1^2 + L_3^2 & L_1 L_2 + L_3 L_4 \\ L_1 L_2 + L_3 L_4 & L_2^2 + L_4^2 \end{pmatrix}. \tag{4.2}$$

[1] Das hier untersuchte Raumzeitmodell ist vierdimensional. Damit stellt der zweidimensionale Fall offensichtlich nicht das volle Problem dar, jedoch lassen sich aus der Vereinfachung des Problems auf zwei Dimensionen wertvolle Erkenntnisse gewinnen und auf den vierdimensionalen Fall übertragen. Weiterhin ist der zweidimensionale Fall durch die in der Argumentation verwendete Unterscheidung in gerade und ungerade Dimensionen näher als eine Vereinfachung in drei Dimensionen.

[2] Wir schreiben $O(\mathbb{1})$, da, anders als in vier Dimensionen, je nach Wahl des Grundkörpers, diese orthogonale Gruppe vom minus- oder plus-Typen sein kann.

Man erhält also ein quadratisches Gleichungssystem für die Komponenten der Transformationsmatrix L. Als allgemeine Lösung erhält man:

$$L = \begin{pmatrix} a & -\sigma\sqrt{1-a^2} \\ \sqrt{1-a^2} & \sigma a \end{pmatrix}, \tag{4.3}$$

wobei $a \in \mathbb{K} : \sqrt{1-a^2} \in \mathbb{K}$ und $\sigma = \pm 1$ ein Vorzeichen ist. Da der zugrundeliegende Körper $\mathbb{K}$ endlich ist, lässt sich die Lorentz-Gruppe in zwei Dimensionen außerdem abzählen. Die Anzahl der Lorentz-Transformationen wird dabei durch die Anzahl der Körperelemente mit obiger Bedingung bestimmt. Dies sind gerade die $a \in \mathbb{K}$, für die gilt:

$$\exists x \in \mathbb{K} : \begin{pmatrix} a \\ x \\ 1 \end{pmatrix}^t \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ x \\ 1 \end{pmatrix} = 0. \tag{4.4}$$

Diese Gleichung beschreibt die affinen Punkte einer projektiven Quadrik. Es bezeichne $q = |\mathbb{K}|$ die Ordnung des zugrundeliegenden endlichen Körpers, dann befinden sich auf einer zweidimensionalen projektiven Quadrik gerade $q+1$ Punkte. Die affinen Punkte der Quadrik lassen sich jetzt einfach berechnen, wenn bekannt ist, wie viele Unendlichkeitspunkte, das heißt Punkte der Form $(x, y, 0)^t$, auf der Quadrik liegen. Diese erhält man als Lösung der Gleichung

$$x^2 + y^2 = 0 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{-1}y. \tag{4.5}$$

Je nachdem, ob -1 in $\mathbb{K}$ also eine Quadratzahl ist und damit die Wurzel $\sqrt{-1}$ existiert oder nicht, gibt es für obige Gleichung 2 oder 0 Lösungen. Demnach gilt für die Anzahl an affinen Punkten der Quadrik und damit für die Anzahl $\#_a$ von $a \in \mathbb{K}$ mit $\sqrt{1-a^2} \in \mathbb{K}$:

$$\#_a = \begin{cases} q+1 \text{ für } \sqrt{-1} \notin \mathbb{K} \\ q-1 \text{ für } \sqrt{-1} \in \mathbb{K} \end{cases} \tag{4.6}$$

Für die Ordnung der zweidimensionalen orthogonalen Gruppe folgt nun, da in der Normalform das Vorzeichen σ als zusätzlicher Freiheitsgrad auftritt:

$$|O_2| = \begin{cases} 2(q+1) \text{ für } \sqrt{-1} \notin \mathbb{K} \\ 2(q-1) \text{ für } \sqrt{-1} \in \mathbb{K} \end{cases} \tag{4.7}$$

Auch für den physikalisch bedeutungsvollen Fall von vier Raumzeitdimensionen erhält man aus der Orthogonalitätsbedingung ein quadratisches Gleichungssystem, diesmal jedoch nicht für vier sondern für 16 Komponenten. Dieses Gleichungssystem lässt sich allerdings nicht mehr ohne Zusatzannahmen an die Komponenten der Transformationsmatrix lösen. Es muss also ein anderer Weg gefunden werden, eine Normalform der Lorentz-Transformationen in vier Raumzeitdimensionen zu finden, beziehungsweise die Struktur der endlichen, vierdimensionalen, orthogonalen Standardgruppe genauer zu verstehen. Im Folgenden soll diese Gruppe mit den Methoden der Gruppentheorie genauer untersucht werden. Hierfür sind vorerst einige weitere Definitionen und Konzepte notwendig.

4.2 Kompositionsreihe der Lorentz-Gruppe

Zwar lässt sich für die vierdimensionale Lorentz-Gruppe keine einfache Normalform der Matrixdarstellung mehr finden, wie dies im zweidimensionalen Fall möglich war, jedoch kann die Gruppe auf abstrakte Weise zerlegt werden, wodurch deren Struktur verstanden werden kann, wenn nur die Struktur der einzelnen Bausteine verstanden wird. Um solch eine Zerlegung vorzunehmen, müssen wir zunächst das Konzept der Kompositionsreihe einer Gruppe verstehen.

Definition 4.1. *Einfache Gruppe (siehe [Ros09] S. 33)*
Eine einfache Gruppe ist eine Gruppe G die keinen nichttrivialen Normalteiler besitzt, also eine Gruppe, für welche gilt:

$$N \lhd G \Rightarrow N = 1 \text{ oder } N = G, \tag{4.8}$$

wobei 1 *die triviale Gruppe, die lediglich aus einem neutralen Element besteht, bezeichnet.*

Jetzt lässt sich der Begriff einer Kompositionsreihe definieren.

Definition 4.2. *Kompositionsreihe (vgl. [Ros09] S. 188 ff.)*
Es sei G eine Gruppe, eine Kompositionsreihe von G ist eine Reihe von Gruppe G_i (i=0,...,n) für die gilt:

$$1 = G_0 \lhd G_1 \lhd ... \lhd G_n = G, \tag{4.9}$$

wobei jeweils G_{i-1} maximaler Normalteiler von G_i ist, oder gleichbedeutend die Faktoren G_i/G_{i-1} einfach sind.

Bemerkung. *Die Faktoren G_i/G_{i-1} für i=1,...,n nennt man die Kompositionsfaktoren der Gruppe G. Diese sind nach der Definition einfache Gruppen, es kann also keine weitere Gruppe in die Kompositionsreihe eingeschoben werden. Daher lässt sich die Kompositionsreihe einer Gruppe auch als subnormale Serie maximaler Länge definieren. Zu beachten ist auch, dass nicht jede Gruppe eine solche Kompositionsreihe besitzt. Existiert eine Kompositionsreihe, so kann die Gruppe auch mehrere besitzen und diese können sich durchaus unterscheiden. Die Länge der verschiedenen Kompositionsreihen ist allerdings gleich, man bezeichnet sie als Kompositionslänge. Jede endliche Gruppe besitzt mindestens eine Kompositionsreihe und für den hier betrachteten Fall sind nur endliche Gruppen von Interesse (vgl. hierzu [Ros09] S. 188 ff.).*

Die Frage nach der Eindeutigkeit einer solchen Kompositionsreihe liefert das Jordan-Hölder-Theorem.

Satz 4.1. *Jordan-Hölder-Theorem*
Es sei G eine Gruppe und

$$\begin{aligned} 1 = H_1 \lhd ... \lhd H_n = G, \\ 1 = K_1 \lhd ... \lhd K_n = G \end{aligned} \tag{4.10}$$

seien zwei beliebige Kompositionsreihen von G. Dann sind die Kompositionsfaktoren der beiden Serien, also die H_i/H_{i-1} und die K_j/K_{j-1} bis auf Isomorphie und eine Permutation der Indizes bereits gleich, es gilt also:

$$\forall i \in \{0, ..., n\} : \exists j \in \{0, ..., n\} : H_i/H_{i-1} \widetilde{=} K_j/K_{j-1}. \tag{4.11}$$

Beweis. Siehe für den Beweis [Ros09] S. 190 ff. □

Bemerkung. *Die Kompositionsfaktoren einer jeden endlichen Gruppe sind also im Sinne der Gruppentheorie eindeutig bestimmt und können daher als Bausteine der Gruppe betrachtet werden. Viele Aspekte der Gruppe lassen sich untersuchen, indem diese für die Kompositionsfaktoren untersucht werden. Sind die Kompositionsreihe und damit die Kompositionsfaktoren der endlichen Lorentz-Gruppe also erst einmal bestimmt, so muss nur noch geklärt werden, wie sich diese Faktoren zur Lorentz-Gruppe zusammenfügen lassen.*

Die vierdimensionale orthogonale Gruppe lässt sich also untersuchen, indem eine Serie von Normalteilern gesucht wird, so dass die entstehenden Quotienten einfach sind. Diese Normalteiler lassen sich als die Kerne von Gruppenhomomorphismen finden. Hierfür sei zunächst vermerkt, dass für die Elemente der orthogonalen Gruppe $\Lambda \in O_4$ aus $\Lambda^t\Lambda = \mathbb{1}$ für die Determinante folgt:

$$\det(\Lambda)^2 = \det(\Lambda^t) \det(\Lambda) = \det(\Lambda^t\Lambda) = \det(\mathbb{1}) = 1 \Leftrightarrow \det(\Lambda) = \pm 1, \tag{4.12}$$

wobei der Determinantenproduktsatz verwendet wurde. Auch folgt aus diesem Satz, dass die Determinante ein Gruppenhomomorphismus ist. Es gilt also:

$$\det : O_4 \longrightarrow 2 = (\{\pm 1\}, \cdot), \quad \Lambda \longmapsto \det(\Lambda). \tag{4.13}$$

Den Kern dieses Homomorphismus bilden gerade die Elemente mit Determinante 1. Diese sind somit ein Normalteiler, den man als spezielle orthogonale Gruppe SO_4 bezeichnet. Zusammen mit dem nachfolgenden, ersten Isomorphismentheorem ist damit also gezeigt:

$$SO_4 \lhd O_4 \quad O_4/SO_4 \widetilde{=} 2. \tag{4.14}$$

Die 2 bezeichnet dabei die Gruppe mit zwei Elementen. Da jede Untergruppe dieser entweder die Gruppe selbst oder die triviale, nur aus einem neutralen Element bestehende Untergruppe ist, ist die Gruppe 2 einfach und damit bereits der erste Kompositionsfaktor.

Satz 4.2. *Erstes Isomorphismentheorem*
Es seien G und H zwei Gruppen, sowie $f : G \longrightarrow H$ ein Isomorphismus, dann gilt:

- $\mathrm{Kern}(f) \lhd G$,
- $\mathrm{Bild}(f) \leq H$,
- $\mathrm{Bild}(f) \widetilde{=} G/\mathrm{Kern}(f)$.

Beweis. Für den Beweis siehe [Ros09] S. 75. □

Jedoch ist SO_4 selbst nicht einfach, besitzt also nichttriviale normale Untergruppen. Eine solche Untergruppe[3] erhält man als Kern der sogenannte Spinornorm[4], diese funktioniert ähnlich wie die Determinante. Nach dem Carthan-Dieudonné Theorem lässt sich jedes Element der speziellen orthogonalen Gruppe in vier Dimensionen als Produkt von Reflexionen schreiben (siehe [HM08] S. 272 ff.). Eine Reflexion wird dabei durch folgende Abbildung definiert:

$$r_v : x \longmapsto x - 2\frac{x^t v}{v^t v} v. \tag{4.15}$$

Die Reflexion negiert also den von v aufgespannten Unterraum $\langle v \rangle$ und lässt dabei dessen orthogonales Komplement invariant. In den hier betrachteten Körpern gibt es jetzt für v zwei Möglichkeiten. Entweder es ist $v^t v \in \mathscr{Q}(\mathbb{K})$ und damit existiert ein $\lambda \in \mathbb{K}$ mit $\lambda^2 = v^t v$. Jetzt lässt sich aufgrund der linearen Struktur des Unteraumes statt v auch $\lambda^{-1} v \in \langle v \rangle$ betrachten und es gilt $(\lambda^{-1} v)^t (\lambda^{-1} v) = \frac{v^t v}{\lambda^2} = 1$, der den Unterraum aufspannende Vektor lässt sich also auf 1 normieren. Ist dagegen $v^t v$ keine Quadratzahl, so ist dies nicht möglich, die „Länge[5]“ des Vektors $v^t v$ lässt sich dann wie schon zuvor höchstens auf eine beliebige Nichtquadratzahl α skalieren.

Für jede Reflexion bestehen also zwei Möglichkeiten: Entweder wird ein Unterraum aufgespannt von einem Vektor mit Länge 1 negiert, oder aber ein solcher, aufgespannt von einem Vektor von Länge α. Da jede Reflexion Determinante -1 hat, die Elemente aus SO_4 aber Determinante 1 besitzen, muss wieder nach dem Determiantenproduktsatz, die gesamte Anzahl an Reflexionen stets gerade sein. So entstehen erneut zwei sich gegenseitig ausschließende Möglichkeiten für die Darstellung eines jeden Elements von SO_4 als Komposition von Reflexionen. Entweder ist sowohl die Anzahl $\#_1$ der Reflexionen, die einen Unterraum, aufgespannt von einem Vektor mit Länge 1, negieren, als auch die Anzahl $\#_\alpha$ derer, die einen von einem Vektor mit Länge α aufgespannten Unterraum negieren, gerade oder aber beide Anzahlen $\#_1$, $\#_\alpha$ sind ungerade. Jetzt lässt sich die Spinornorm definieren.

Die Spinornorm ist ein Homomorphismus[6] von der speziellen orthogonalen Gruppe, in diesem Fall in vier Dimensionen in die Gruppe mit zwei Elementen[7].

Definition 4.3. *Spinornorm* Sp *([Wil09] S. 70)*
Es sei $\Lambda \in SO_4$ und $\#_1(\Lambda)$, $\#_\alpha(\Lambda)$ die zuvor definierten Größen für eine beliebige Dar-

[3] An dieser Stelle sei daran erinnert, dass es nach dem Jordan-Hölder-Theorem keine Rolle spielt in welcher Reihenfolge wir die Zerlegung der Gruppe vornehmen. Die einzige Notwendigkeit ist, dass die entstehenden Kompositionsfaktoren einfach sind.

[4] Vergleiche hierzu [Wil09] Kapitel 3.7.1, 3.9.1, 3.9.2, 3.9.3, sowie [HM08] S. 272 ff.

[5] Mit Länge ist hier der Wert unter der quadratischen Form gemeint, denn da die Wurzel nicht existiert lässt sich keine gewöhnliche Länge definieren.

[6] Auch der Beweis, dass es sich tatsächlich um einen Isomorphismus handelt, kann in [Wil09] nachgelesen werden.

[7] Selbstverständlich lässt sich die Spinornorm genauso auf der kompletten orthogonalen Gruppe definieren.

stellung von Λ als Produkt von Reflexionen. Dann ist die Spinornorm folgende Abbildung:

$$Sp: \ SO_4 \longrightarrow 2 \ \ L \longmapsto \begin{cases} 1 & \textit{für } \#_1(L) \in 2\mathbb{N} \\ -1 & \textit{für } \#_1(L) \in 2\mathbb{N}+1 \end{cases} \tag{4.16}$$

Zwar ist die Darstellung der Elemente aus SO_4 als Produkt von solchen Reflexionen nicht eindeutig. Jedoch ist für zwei verschiedene Darstellungen des selben Elementes $\Lambda \in SO_4$ stets $\#_1(\Lambda) \in 2\mathbb{N}$ für die eine Darstellung genau dann, wenn dies für die andere Darstellung der Fall ist. Damit ist die Spinornorm unabhängig von der Wahl der jeweiligen Darstellung, also wohldefiniert.

Der Kern der Spinornorm ist dann die Menge der Elemente aus der speziellen orthogonalen Gruppe, die sich als Produkt einer geraden Anzahl von Spiegelungen an Vektoren mit Länge 1 und einer geraden Anzahl von Spiegelungen an Vektoren mit Länge α schreiben lassen. Diese Menge bezeichnen wir im Folgenden als Ω_4. Es gilt also insgesamt:

$$\Omega_4 \lhd SO_4 \ \text{ und } \ SO_4/\Omega_4 \widehat{=} 2. \tag{4.17}$$

Somit ist der zweite Kompositionsfaktor gefunden. Nun gilt allerdings für gerade Dimensionen n, und daher insbesondere für den vierdimensionalen Fall $\det(-\mathbb{1}_4) = 1$. Daher ist $-\mathbb{1}_4 \in SO_4$. Weiterhin gilt für die vier Basisvektoren der Orthonormalbasis $(e_1, ..., e_4)$, für die die symmetrische Bilinearform Darstellungsmatrix $\mathbb{1}_4$ besitzt, $e_i^t e_j = \delta_{ij}$ und daher auch $e_i^t e_i = 1$. Die durch $-\mathbb{1}_4$ beschriebene Abbildung negiert gerade die vier Basisvektoren und kann daher als Produkt von vier Vektoren mit Länge eins geschrieben werden. Sie besitzt also Spinornorm eins. Deshalb ist $-\mathbb{1}_4$ im Kern der Spinornorm Ω_4 enthalten. Daher gilt:

$$2 \widehat{=} (\{\pm \mathbb{1}_4\}, \circ) \leq \Omega_4. \tag{4.18}$$

Der Kern der Spinornorm besitzt also eine nichttriviale Untergruppe. Wie nachfolgender Satz zeigt, ist diese ein Normalteiler der orthogonalen Gruppe und daher auch Normalteiler von Ω_4.

Satz 4.3. *Zentrum von O_4*
Für das Zentrum der vierdimensionalen orthogonalen Gruppe gilt:

$$Z(O_4) = (\{\pm \mathbb{1}_4\}, \circ). \tag{4.19}$$

Beweis. Wir beweisen die Aussage zuerst in zwei Dimensionen, das heißt wir zeigen $Z(O_2) = (\{\pm \mathbb{1}_2\}, \circ)$. Sei also $Z \in Z(O_2)$ beliebig, dann muss nach der Definition des Zentrums, Z mit jedem Element der zweidimensionalen orthogonalen Gruppe kommutieren. Dies gilt also insbesondere für die zwei Matrizen

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in O_2, \ \ X' = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in O_2, \tag{4.20}$$

denn diese sind offensichtlich Elemente der orthogonalen Gruppe. Somit erhält man unter Verwendeung der Parameterform von $Z \in Z(O_2)$,

$$Z = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \tag{4.21}$$

für die Komponenten folgende Bedingungen:

$$XZ = ZX \Leftrightarrow a = d,\ b = c \text{ und } X'Z = ZX' \Leftrightarrow a = d,\ b = -c. \tag{4.22}$$

Daher gilt insgesamt, da umgekehrt jede skalare Matrix mit Determinante gleich 1 ein Element des Zentrums ist: $Z \in Z(O_4) \Leftrightarrow Z = a\mathbb{1}_2$. Z ist also bereits eine skalare Matrix. Außerdem besitzt Z Determinante eins, $\pm 1 = \det(Z) = a^2$, also folgt $Z(O_2) = \pm\mathbb{1}_2$.

Jetzt erhält man für $Z \in Z(O_4)$ mit der Blockmatrixaufteilung,

$$X = \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{1}_2 \\ \mathbb{1}_2 & 0 \end{pmatrix} \in O_4, \quad X' = \begin{pmatrix} 0 & -\mathbb{1}_2 \\ \mathbb{1}_2 & 0 \end{pmatrix} \in O_4, \quad Z = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}, \tag{4.23}$$

dasselbe Ergebnis wie schon zuvor, diesmal jedoch für die 2×2-Blöcke. Z ist also eine Blockdiagonale Matrix und die beiden Diagonalblöcke sind identisch.

$$Z \in Z(O_4) \Leftrightarrow Z = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix}. \tag{4.24}$$

Zudem muss jedes Element des Zentrums mit den beiden folgenden Matrizen kommutieren, denn diese sind offensichtlich Elemente der orthogonalen Gruppe:

$$\tilde{X} = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} & 0 \\ 0 & \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix}, \ \tilde{X}' = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} & 0 \\ 0 & \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix}. \tag{4.25}$$

Daraus ergibt sich insgesamt für Z:

$$Z\tilde{X} = \tilde{X}Z \text{ und } Z\tilde{X}' = \tilde{X}'Z \Leftrightarrow Z = a\mathbb{1}_4. \tag{4.26}$$

Jetzt folgt, da $\det(Z) = a^2$, somit insgesamt für das Zentrum $Z(O_4) = \pm\mathbb{1}_4$, denn wie schon zuvor ist jede skalare Matrix mit Determinante 1 aus dem Zentrum. □

Bemerkung. *Damit ist auch gezeigt, dass $\pm\mathbb{1}_4 \lhd O_4$ und daher auch ein Normalteiler von Ω_4 ist, denn da $\pm\mathbb{1}_4 \lhd O_4$, gibt es einen Homomorphismus ϕ mit $\mathrm{Kern}(\phi) = \pm\mathbb{1}_4$. Diesen können wir ohne Weiteres auf Ω_4 einschränken, um das gewünschte Ergebnis zu erhalten.*

Teilt man den zweielementigen Normalteiler aus Ω_4 heraus, so erhält man die projektive Gruppe $P\Omega_4 = \Omega_4/2$. Allerdings ist auch diese in vier Dimensionen nicht einfach. Es müssen also weitere Untergruppen in die Kompositionsreihe eingeschoben werden. Mit Methoden der Darstellungstheorie kann gezeigt werden, dass gilt:

$$P\Omega_4 = PSL_2 \times PSL_2. \tag{4.27}$$

Wobei $PSL_2 = SL_2/2$ die projektive, spezielle lineare Gruppe bezeichnet, das heißt die Gruppe der invertierbaren, bis auf skalare Vielfache bestimmten 2×2 Matrizen mit Determinante gleich 1 und Einträgen in $\mathbb{K}$. Wie man dieses Resultat genau erhält, kann in [Wil09] Kapitel 3.11 auf Seite 96 ff. nachgelesen werden. Der genaue Beweis ist hier nicht aufgeführt, da dieser einige Methoden und Konzepte der Darstellungstheorie verwendet und den Umfang dieser Arbeit zu sehr ausweiten würde.

Das Symbol $\times$ bezeichnet das sogenannte direkte Produkt. Mit diesem können aus bestehenden Gruppen neue Gruppen erzeugt werden. Genauer ist dies sogar die einfachste Art einer sogenannten Gruppenerweiterung. Was dies bedeutet, soll jedoch erst im folgenden Kapitel präzisiert werden. An dieser Stelle genügt es zu definieren, wie das direkte Produkt zweier Gruppen konstruiert wird. Man unterscheidet hierbei zwischen dem internen und dem externen direkten Produkt.

Satz 4.4. *Direktes Produkt*
Es seien für $i = 1, ..., n$ $(G_i, \circ_i)$ Gruppe mit neutralem Element e_i, und

$$G_1 \times ... \times G_n = \{(a_1, ..., a_n) \mid a_i \in G_i \text{ für } i = 1, ..., n\} \tag{4.28}$$

sei das kartesische Produkt der zugrundeliegenden Mengen. Dann wird dieses, ausgestattet mit der inneren zweistelligen Verknüpfung,

$$\begin{aligned} \circ : (G_1 \times ... \times G_n) \times (G_1 \times ... \times G_n) &\longrightarrow G_1 \times ... \times G_n \\ ((a_1, ..., a_n), (b_1, ..., b_n)) &\longmapsto (a_1 \circ_1 b_1, ..., a_n \circ_n b_n), \end{aligned} \tag{4.29}$$

selbst zu einer Gruppe G . Diese Gruppe bezeichnet man als direktes Produkt der G_i und schreibt

$$G = G_1 \times ... \times G_n. \tag{4.30}$$

Beweis. Für den Beweis siehe [Ros09] S. 140. □

Satz 4.5. *Internes direktes Produkt*
Es sei G eine Gruppe und H und J Untergruppen von G, für die gilt: $H \lhd G$, $J \lhd G$, $H \cap J = \{1\}$ und $HJ = \{h \circ j \mid h \in H, j \in J\} = G$. Dann gelten folgende drei Aussagen:

(i) Falls $g = hj$ mit $g \in G, h \in Hj \in J$, dann sind h und j durch g eindeutig bestimmt.

(ii) Für alle $h \in H$ und $j \in J$ gilt $hj = jh$.

(iii) $G \cong H \times J \cong J \times H$.

Dann bezeichnet man G als internes direktes Produkt seiner Untergruppen H und J.

Beweis. Siehe hierfür [Ros09] S. 141. □

Bemerkung. *Dieses Resultat lässt sich problemlos iterativ auf endlich viele Untergruppen erweitern. Weiterhin gilt umgekehrt natürlich auch für jede Gruppe, die als externes direktes Produkt erzeugt wird, also für zwei beliebige Gruppen H und K und die Gruppe $G = H \times K$, $H \hat{=} H \times 1 \lhd G$ und $K \hat{=} 1 \times K \lhd G$ und damit gelten natürlich auch alle zuvor für das interne direkte Produkt genannten Aussagen (vgl. S. 140 ff. in [Ros09]).*

Um aus diesem Ergebnis Informationen über die Struktur von Ω_4 zu gewinnen, verwenden wir einige weitere Isomorphismentheoreme.

Satz 4.6. *Zweites Isomorphismentheorem*
Es sei G eine Gruppe $H \leq G$ und $K \lhd G$, dann gilt: $K \lhd HK \leq G$ und

$$H/(H \cap K) \hat{=} HK/K. \tag{4.31}$$

Beweis. Siehe hierfür [Ros09] S. 77. □

Satz 4.7. *Drittes Isomorphismentheorem*
Es sei G eine Gruppe und H, K seien Untergruppen von G mit $K \lhd H \lhd G$, dann gilt:

$$G/H \hat{=} (G/K)/(H/K). \tag{4.32}$$

Beweis. Siehe [Ros09] S. 79. □

Satz 4.8. *Viertes Isomorphismentheorem*[8]
Es sei wieder G eine Gruppe und $N \lhd G$. Weiterhin sei $\mathscr{G}$ die Menge aller Untergruppen $A \leq G$ mit der Eigenschaft, dass $N \leq A \leq G$ sowie $\mathscr{N}$ die Menge der Untergruppen von G/N, dann definiert

$$\phi : \mathscr{G} \longrightarrow \mathscr{N} \quad A \longmapsto A/N \tag{4.33}$$

eine bijektive Abbildung.

Beweis. Siehe für den Beweis [Ros09] S. 78. □

Korollar 4.1. *Aus dem vierten Isomorphismentheorem erhält man zudem:*

- $A \leq G \Leftrightarrow A/N \leq G/N$,
- $A \lhd G \Leftrightarrow A/N \lhd G/N$.

[8] Wir bezeichnen diesen Satz als viertes Isomorphismentheorem. Es gibt allerdings Autoren, die ihn als drittes Isomorphismentheorem bezeichnen und den hier als drittes Isomorphismentheorem aufgeführten Satz als viertes Isomorphismentheorem. Alternativ gibt es auch die Bezeichnung Korrespondenztheorem.

Jetzt lässt sich zeigen, dass gilt:

$$P\Omega_4 = PSl_2 \times PSl_2 \Rightarrow SL_2/2 = PSl_2 \lhd P\Omega_4 = \Omega_4/2 \tag{4.34}$$

und damit mit dem vierten Isomorphismentheorem $SL_2 \lhd \Omega_4$ ist. Für den zugehörigen Quotienten gilt jetzt nach dem dritten Isomorphismentheorem:

$$\Omega_4/SL_2 \tilde{=} (\Omega_4/2)/(SL_2/2) = P\Omega_4/PSL_2. \tag{4.35}$$

Nach der Definition des direkten Produktes und dessen Eigenschaften sowie zusammen mit dem zweiten Isomorphismentheorem gilt:

$$P\Omega_4/PSL_2 = (PSL_2 \times PSL_2)/PSL_2 = PSL_2PSL_2/PSL_2 \tilde{=} PSL_2/1 = PSl_2, \tag{4.36}$$

wobei verwendet wurde, dass die beiden Faktoren des direkten Produktes sich nur im neutralen Element schneiden. Damit erhalten wir insgesamt:

$$SL_2 \lhd \Omega_4 \text{ und } \Omega_4/SL_2 = PSL_2. \tag{4.37}$$

Da die Gruppe PSL_2 einfach ist (vgl. hierzu [Wil09] S. 45 ff.), ist ein weiteres Element der Kompositionsreihe und damit ein weiterer Kompositionsfaktor gefunden. Die Untersuchung der inneren Struktur von SL_2 gestaltet sich jetzt einfach. Die einzige normale Untergruppe ist

$$2 = (\{\pm\mathbb{1}_2\}, \circ) \lhd SL_2. \tag{4.38}$$

Dies ist gleichzeitig das Zentrum der Gruppe, da $\pm\mathbb{1}_2$ die einzigen skalaren 2×2 Matrizen sind mit Determinante gleich eins. Teilt man das Zentrum von SL_2 heraus, so erhält man wie schon zuvor die projektive Gruppe PSL_2. Außerdem besitzt die Gruppe mit zwei Elementen keine nichttriviale Untergruppe und daher auch keinen nichttrivialen Normalteiler. Sie ist daher einfach. Es lassen sich also keine weiteren Faktoren mehr in die subnormale Serie einschieben, diese besitzt also maximale Länge und ist daher bereits die gesuchte Kompositionsreihe:

$$1 \lhd 2 \lhd SL_2 \lhd \Omega_4 \lhd SO_4 \lhd O_4. \tag{4.39}$$

Für die zugehörigen Kompositionsfaktoren erhalten wir dann:

$$\{PSL_2, PSL_2, 2, 2, 2\}. \tag{4.40}$$

4.3 Die n-dimensionale Lorentz-Gruppe

Schließlich soll kurz die Verallgemeinerung auf eine n-dimensionale Raumzeit diskutiert werden. Hierfür sei zunächst $n \in 2\mathbb{N}$ gewählt und $\mathbb{P}^n\mathbb{F}_q$ sei die zugehörige projektive Raumzeit. Die gesamte Argumentation aus Satz 3.13 lässt sich dann wiederholen, sodass wir erhalten:

$$\mathscr{L}_p \tilde{=} O_n. \tag{4.41}$$

Auch der Anfang der Zerlegung der orthogonalen Gruppe funktioniert identisch, wir können also durch die Determinante und die Spinornorm zweimal eine Gruppe mit Ordnung zwei herausteilen und erhalten Ω_n als Kern der Spinornorm. Jetzt besteht ein wesentlicher Unterschied zum vierdimensionalen Fall. Teilen wir das Zentrum aus Ω_n heraus und erhalten so die projektive Gruppe $P\Omega_n$, so ist diese für $n \geq 5$ einfach (vgl. S. 74 [Wil09]). Wir erhalten damit einen Faktor weniger in der Kompositionsreihe.

Ist andererseits $n \in 2\mathbb{N} + 1$, so sind die beiden Matrizen der Normalform (2.24) der Biquadrik $(M, \overline{M})$ mit Standardzentrum, A und αA, Elemente aus $\mathbb{F}_q^{n\times n}$, wobei n ungerade ist. Der Fall, dass diese sich durch Basiswechsel auf die Einheitsmatrix abbilden lassen kann dann wieder analog behandelt werden. Ist dies nicht der Fall, so existiert eine Basis bezüglich welcher A die Form $A = \mathrm{diag}(1, ..., 1, \alpha^{-1})$ besitzt. Dann gilt:

$$M = \begin{pmatrix} \mathbb{1}_{n-1} & & \\ & \alpha^{-1} & \\ & & 1 \end{pmatrix}, \quad \overline{M} = \begin{pmatrix} \alpha\mathbb{1}_{n-1} & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix}. \tag{4.42}$$

Da $n-1$ eine gerade Zahl ist, lassen sich die oberen $n-1$ Diagonaleinträge von $\overline{M}$ durch eine geeignete Transformation auf eins normieren. Somit erhält man:

$$M = \begin{pmatrix} \alpha^{-1}\mathbb{1}_n & \\ & 1 \end{pmatrix}, \quad \overline{M} = \mathbb{1}_{n+1}, \tag{4.43}$$

und damit wieder:

$$\mathscr{L}_p \tilde{=} O_n. \tag{4.44}$$

Die Lorentzgruppe ist somit für eine beliebig dimensionale Raumzeit isomorph zur entsprechend dimensionalen, orthogonalen Gruppe.

5 Zusammenfügen der Faktoren

Nun sind die Kompositionsfaktoren der endlichen, vierdimensionalen orthogonalen Gruppe ermittelt. Nach dem Jordan-Hölder-Theorem sind diese zudem eindeutig bestimmt. Um jetzt allerdings Nutzen aus diesem Wissen zu ziehen, muss geklärt werden wie sich die Gruppe O_4 aus diesen Faktoren zusammenfügen lässt. Zwar sind die Kompositionsfaktoren einer Gruppe, sofern diese eine Kompositionsreihe besitzt, eindeutig bestimmt, jedoch gibt es im Allgemeinen verschiedene, nicht isomorphe Gruppen mit der gleichen Kompositionsreihe. Dies liegt daran, dass es eine Vielzahl verschiedener Arten gibt, die einzelnen Faktoren zusammenzufügen. Bis heute sind noch nicht alle diese Arten klassifiziert. Dies bezeichnet man als das „Erweiterungsproblem[1]“ der Gruppentheorie (vgl. S. 196 ff. aus [Ros09]).

Um also genau zu verstehen, wie die orthogonale Gruppe aus ihren Kompositionsfaktoren aufgebaut werden kann, muss zuerst das Konzept einer allgemeinen Gruppenerweiterung verdeutlicht werden.

5.1 Methoden der Gruppenerweiterung

Definition 5.1. *Kurze exakte Sequenz ([Kar89] S. 53)*
Eine kurze exakte Sequenz ist eine Serie von Gruppen und Homomorphismen zwischen diesen,

$$1 \longrightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \longrightarrow 1, \tag{5.1}$$

wobei f ein Monomorphismus das heißt injektiv und g ein Epimorphismus also surjektiv ist. Zudem ist $\mathrm{Bild}(f) = \mathrm{Kern}(g)$.

Bemerkung. *Da f injektiv ist, kann dies als Einbettung von A in B angesehen werden, denn die Abbildung $f : A \longrightarrow \mathrm{Bild}(f)$ ist dann bijektiv und als Bild eines Homomorphismus ist $\mathrm{Bild}(f) \leq B$ eine Untergruppe von B. A ist also isomorph zu einer Untergruppe von B und da, $\mathrm{Bild}(f) = \mathrm{Kern}(g)$, ist diese Untergruppe sogar ein Normalteiler. Also gilt bis auf Isomorphie:*

$$A \lhd B. \tag{5.2}$$

Nach dem ersten Isomorphismentheorem gilt jetzt $\mathrm{Bild}(g) \tilde{=} B/\mathrm{Kern}(g) \tilde{=} B/A$ *und da g surjektiv ist, gilt bis auf Isomorphie*

$$C = B/A. \tag{5.3}$$

[1] Engl. „extension problem“.

Jetzt lässt sich auch das Konzept einer Gruppenerweiterung definieren.

Definition 5.2. *Gruppenerweiterung ([Kar89] S. 53)*
Es seien A und C zwei Gruppen, dann nennt man B eine Gruppenerweiterung oder kurz eine Erweiterung von C mit A, wenn eine kurze exakte Sequenz der Form

$$1 \longrightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \longrightarrow 1 \tag{5.4}$$

existiert. Ist B also eine Erweiterung von C mit A, so ist wieder bis auf Isomorphie $A \lhd G$ und $C = B/A$. Für „B ist Erweiterung von C mit A“ schreiben wir im Folgenden kurz $B = C.A$.

Die einfachste Art einer Gruppenerweiterung ist gerade das zuvor definierte direkte Produkt, denn wenn $G = H \times J$ dann ist offensichtlich $H \lhd G$ und $G/H = J$, wie zuvor gezeigt wurde. Demnach existiert also auch folgende kurze exakte Sequenz:

$$1 \longrightarrow H \xrightarrow{f} G \xrightarrow{g} J \longrightarrow 1. \tag{5.5}$$

Wobei diesmal f schlicht die Einbettung von H in G beschreibt und g die kanonische Projektion auf den Faktor J ist. Tatsächlich ist G genau dann das direkte Produkt der beiden Gruppen H und J, wenn sowohl $G = H.J$ als auch $G = J.H$ gilt; wenn also eine kurze exakte Sequenz der Form

$$1 \longrightarrow H \longrightarrow G \longrightarrow J \longrightarrow 1, \tag{5.6}$$

aber auch die umgekehrt kurze exakte Sequenz,

$$1 \longrightarrow J \longrightarrow G \longrightarrow H \longrightarrow 1, \tag{5.7}$$

existiert. Weiterhin sind für unsere Zwecke sogenannte Split-Extensions von großer Bedeutung, denn es besteht ein Eins-zu-eins-Zusammenhang zwischen diesen und den sogenannten semidirekten Produkten, die das Konzept des direkten Produktes verallgemeinern.

Definition 5.3. *Semidirektes Produkt (vgl. [Ros09] S. 151)*
Es sei G eine Gruppe, sowie $K \lhd G$ und $A \leq G$, mit den Eigenschaften, dass

$$G = AK \text{ und } A \cap K = \{1\}, \tag{5.8}$$

dann bezeichnet man G als (internes) semidirektes Produkt der beiden Gruppen A und K und schreibt:

$$G = A \rtimes K. \tag{5.9}$$

Bemerkung. *Anders als beim direkten Produkt wird hier also nur gefordert, dass eine der beiden Gruppen Normalteiler von G ist. In unserer Notation kennzeichnen wir diese, indem wir sie stets an die rechte Seite des Symbols schreiben.*

Satz 5.1. *Ist $G = A \rtimes K$ so gilt:*

$$\forall g \in G : \exists! a \in A, k \in K : g = a \circ k. \tag{5.10}$$

Beweis. Siehe [Ros09] S. 152. □

Genau wie zuvor beim direkten Produkt lässt sich neben dem eben definierten (internen semidirekten) Produkt zweier Untergruppen auch ein (externes) semidirektes Produkt zweier beliebiger Gruppen konstruieren. Analog zum externen direkten Produkt wird auch hier auf der Produktmenge der beiden zugrundeliegenden Mengen eine Verknüpfung definiert.

Satz 5.2. *(externes) Semidirektes Produkt*
Es seien A und K zwei Gruppen, sowie ϕ ein Homomorphismus $\phi : A \longrightarrow \mathrm{Aut}(K)$, dann wird das kartesiche Produkt $A \times K$ zusammen mit der folgenden inneren zweistelligen Verknüpfung:

$$(a_1, k_1) \circ (a_2, k_2) := (a_1 \circ a_2, \phi(a_2)(k_1) \circ k_2), \tag{5.11}$$

selbst zu einer Gruppe, die man als (externes) semidirektes Produkt von A mit K bezüglich ϕ bezeichnet. Wir schreiben hierfür $A \rtimes_\phi K$.

Beweis. Siehe [Ros09] S. 153 ff. □

Bemerkung. *Genau wie zuvor beim direkten Produkt resultiert die Unterscheidung in internes und externes semidirektes Produkt nur daher, dass die beiden Fälle auf unterschiedliche Weise konstruiert wurden. Identifizieren wir A mit $A \rtimes_\phi e$ und genauso K mit $e \rtimes_\phi K$, so erhalten wir genau wie für den internen Fall $A \leq A \rtimes_\phi K$ und $K \lhd A \rtimes_\phi K$. Umgekehrt lässt sich für das interne semidirekte Produkt stets ein Homomorphismus finden, sodass die auf dem internen semidirekten Produkt definierte Multiplikation mit der des externen semidirekten Produktes übereinstimmt (siehe hierzu [Ros09] S. 152).*

Definition 5.4. *Split-Extension ([Kar89] S. 53)*
Eine Split-Extension ist eine Gruppenerweiterung

$$1 \longrightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \longrightarrow 1 \tag{5.12}$$

der Gestalt, dass ein Homomorphismus $s : C \longrightarrow B$ existiert, für welchen gilt:

$$g \circ s = \mathrm{id}_C \,. \tag{5.13}$$

Die Hintereinanderausführung von s und g ist also gerade die Identitätsabbildung auf C.

Bemerkung. *Aus dieser Bedingung folgt bereits, dass die Abbildung s injektiv ist, denn für $a, b \in C$ gilt:*

$$s(a) = s(b) \Rightarrow g \circ s(a) = g \circ s(b) \Leftrightarrow a = b. \tag{5.14}$$

Wie schon zuvor definiert dann die Abbildung $s : C \longrightarrow \mathrm{Bild}(s)$ einen Isomorphismus und $\mathrm{Bild}(s)$ ist eine Untergruppe von B, welche isomorph zu C ist. Daher kann s als Einbettung von $C = B/A$ in B gesehen werden. Die Erweiterung ist deshalb genau dann eine Split-Extension, wenn $B/A \leq B$.

Satz 5.3. *Splitting-Lemma*
Es sei G eine Erweiterung von A mit K also $G = A.K$, dann ist dies genau dann eine Split-Extension, wenn G semidirektes Produkt von A mit K ist; wenn also gilt:

$$G = A \rtimes K. \tag{5.15}$$

Beweis. Wir führen den Beweis in beide Richtungen. Sei zunächst $G = A \rtimes K$ dann ist nach Definition des semidirekten Produktes

$$K \lhd G,\ AK = G,\ \text{und}\ K \cap A = \{e\}. \tag{5.16}$$

Definiere jetzt die Einbettung von K in G als

$$f : K \longrightarrow G,\ k \longmapsto f(k) := k. \tag{5.17}$$

Dies ist offensichtlich ein injektiver Homomorphismus. Weiterhin sei h der kanonische, surjektive Homomorphismus

$$h : G \longrightarrow G/K,\ g \longmapsto h(g) := hK. \tag{5.18}$$

Damit haben wir bereits eine kurze exakte Sequenz:

$$1 \longrightarrow K \xrightarrow{f} G \xrightarrow{h} G/K \longrightarrow 1. \tag{5.19}$$

Unter Verwendung des zweiten Isomorphismentheorems erhalten wir jetzt:

$$G/K = AK/K \tilde{=} A/(A \cap K) = A/e \tilde{=} A. \tag{5.20}$$

Es existiert also ein Isomorphismus zwischen G/K und $A \leq G$. Wir verwenden, dass nach Satz 5.1 für jedes $g \in G$ eine eindeutige Darstellung als $g = a_g \circ k_g$ existiert, wobei $a_g \in A, k_g \in K$. Der Isomorphismus ist dann gegeben durch:

$$s : G/K \longrightarrow A, \quad gK \longmapsto a_g. \tag{5.21}$$

Wir müssen zeigen, dass s wohldefiniert und ein Isomorphismus ist. Seien hierfür zunächst $x, y \in G$, sodass $xK = yK$ zwei Repräsentanten der gleichen Nebenklasse sind, dann gilt:

$$xK = yK \Leftrightarrow y^{-1}x \in K, \tag{5.22}$$

und daher mit der eindeutigen Darstellung $y = a_y \circ k_y$:

$$x = y \circ (y^{-1} \circ x) = a_y \circ (k_y \circ y^{-1} \circ x). \tag{5.23}$$

Da $k_y \in K$ und $y^{-1}x \in K$ folgt $k_y \circ y^{-1}x \in K$. Somit ist $x = a_x \circ k_x = a_y \circ (k_y \circ y^{-1}x)$ und da die Darstellung eindeutig ist gilt damit: $k_x = a_y \circ (k_y \circ y^{-1}x)$. Es folgt: $s(y) = a_y = s(x)$. Damit ist s repräsentantenunabhängig, also wohldefiniert. Außerdem gilt für $G \ni g = a_g \circ k_g$:

$$g^{-1} \circ a_g = (a_g \circ k_g)^{-1} \circ a_g = k_g^{-1} \circ a_g^{-1} a_g = k_g^{-1} \in K \Leftrightarrow gK = a_g K \tag{5.24}$$

und damit folgt für $x, y \in G$ unter Verwendung der Abgeschlossenheit von A als Untergruppe:

$$\begin{aligned} s(xK \circ yK) &= s(a_xK \circ a_yK) = s((a_x \circ a_y)K) = \\ &= a_x \circ a_y = s(a_xK) \circ s(a_yK) = s(xK) \circ s(yK). \end{aligned} \tag{5.25}$$

Somit ist s ein Homomorphismus. Da außerdem gilt:

$$\forall a \in A : aK \in G/K \text{ und } aK \longmapsto s(aK) = a \in A \Rightarrow \text{Bild}(s) = A, \tag{5.26}$$

ist s surjektiv. Desweiteren ist s auch injektiv, denn es ist

$$s(xK) = s(yK) \Leftrightarrow a_x = a_y \Rightarrow a_xK = a_yK \Leftrightarrow xK = yK. \tag{5.27}$$

Also ist s ein Isomorphismus. Jetzt gilt offensichtlich für ein beliebiges $xK \in G/K$:

$$h \circ s(xK) = h(s(xK)) = h(s(a_xK)) = h(a_x) = a_xK = xK \tag{5.28}$$

und da x beliebig gewählt war, folgt $h \circ x = \text{id}_{G/K}$. Damit ist die Erweiterung bereits eine Split-Extension. Die Rückrichtung ist also bewiesen.

Wir vollenden den Beweis indem wir auch die Hinrichtung beweisen. Sei also umgekehrt G eine Split-Extension von A und K, dann existiert eine kurze exakte Sequenz

$$1 \longrightarrow K \xrightarrow{f} G \xrightarrow{h} A \longrightarrow 1 \tag{5.29}$$

und ein Homomorphismus $s : A \longrightarrow G : h \circ g = \text{id}_A$. Deshalb ist s notwendigerweise injektiv. Damit ist die Abbildung $\tilde{s} : A \longrightarrow \text{Bild}(s) \leq G$ ein Isomorphismus und $A \tilde{=} \text{Bild}(\tilde{s}) = \text{Bild}(s) \leq G$. Da außerdem f injektiv, also $K \tilde{=} \text{Bild}(f) = \text{Kern}(h)$ ist und h surjektiv ist, gilt nach dem ersten Isomorphismentheorem $\text{Bild}(f) \lhd G$ und $A \tilde{=} G/K$. Im Folgenden identifizieren wir die jeweils isomorphen Gruppen und erhalten:

$$K \lhd G,\ A \leq G. \tag{5.30}$$

Wir zeigen jetzt, dass mit dieser Identifikation der Schnitt $K \cap A$ nur aus dem neutralen Element besteht. Wähle hierfür ein $s(x) \in \text{Bild}(s) \tilde{=} A$ dann gilt:

$$s(x) \in \text{Kern}(h) \Leftrightarrow h \circ s(x) = e \Leftrightarrow x = e. \tag{5.31}$$

Und daher $\text{Bild}(s) \cap \text{Kern}(h) \tilde{=} A \cap K = \{e\}$. Für das Produkt der beiden Untergruppen[2] AK folgt jetzt mit der in Satz 6.2 bewiesenen Formel für die Ordnung, zusammen mit dem Satz von Lagrange:

$$|AK| = |A| \cdot |K| = |K| \cdot |G/K| = |K| \cdot \frac{|G|}{|K|} = |G|. \tag{5.32}$$

[2]Siehe hierfür die später folgende Definition 6.3.

Weil zudem[3] $AK \leq G$, folgt Gleichheit. Wir haben also gezeigt, dass $K \lhd G$, $G = AK$, und $A \cap K = \{e\}$. Damit ist G nach Definition semidirektes Produkt von A und K:

$$G = A \rtimes K. \tag{5.33}$$

□

Die Struktur der endlichen orthogonalen Standardgruppe kann jetzt untersucht werden. Diese ist eine sukzessive Erweiterung ihrer Kompositionsfaktoren. Es muss jedoch die präzise Art der jeweiligen Gruppenerweiterung noch geklärt werden. Wir erinnern uns, dass wir zu Beginn der Bestimmung der Kompositionsreihe von O_4 zunächst zweimal eine Gruppe mit Ordnung zwei, also mit zwei Elementen, herausgeteilt haben, einmal mit Hilfe der Spinornorm und einmal mit Hilfe der Determinante.

Zuerst soll geklärt werden, wie O_4 als Erweiterung von SO_4 verstanden werden kann. Wir beginnen die Untersuchung, indem wir zeigen, dass es sich bei dieser Erweiterung um kein direktes Produkt handelt. Um dies zu zeigen, beweisen wir, dass der einzige Normalteiler von O_4 mit Ordnung zwei die Gruppe $\pm\mathbb{1}_4$ also das Zentrum von O_4 ist.

Satz 5.4. *Ist $N \lhd O_4$ mit $|N| = 2$, so gilt bereits: $N = \pm\mathbb{1}_4$.*

Beweis. Es sei also $N = \{\mathbb{1}_4, X\} \lhd O_4$, dann sind die Linksnebenklassen gleich den Rechtsnebenklassen, für alle Elemente von O_4. Es sei nun $Y \in O_4$, dann gilt:

$$NY = YN \Leftrightarrow \{Y, XY\} = \{Y, YX\} \Leftrightarrow XY = YX. \tag{5.34}$$

Da Y beliebig gewählt war, muss also für X gelten:

$$\forall Y \in O_4 : YX = XY \Leftrightarrow X \in Z(O_4) \tag{5.35}$$

und da $|N| = 2$ also insbesondere $X \neq \mathbb{1}_4$ folgt nach Satz 4.3 $X = -\mathbb{1}_4$, was die Behauptung beweist. □

Allerdings gilt jetzt für $SO_4 \lhd O_4$, da in geraden Dimensionen, also insbesondere auch in vier Dimensionen, $\det(-\mathbb{1}_4) = 1$ ist, $\{\pm\mathbb{1}_4\} \leq SO_4$ und daher natürlich auch:

$$SO_4 \cap \{\pm\mathbb{1}_4\} = \{\pm\mathbb{1}_4\} \neq \{1\}. \tag{5.36}$$

Die orthogonale Gruppe O_4 kann nicht als direktes Produkt von SO_4 und 2 geschrieben werden. Allerdings ist eine Darstellung als semidirektes Produkt möglich. Um dies zu beweisen, betrachten wir folgende kurze exakte Sequenz:

$$1 \longrightarrow SO_4 \xrightarrow{f} O_4 \xrightarrow{g} 2 \longrightarrow 1, \tag{5.37}$$

[3] Hier verwenden wir, dass K Normalteiler von G ist. Siehe auch hierfür die später folgende Definition des Untergruppenproduktes 6.3 und den folgenden Satz 6.1.

wobei f die Einbettung von SO_4 in die orthogonale Gruppe und g die Determinante ist. Betrachte jetzt die Abbildung

$$s : 2 = \{\pm 1\} \longrightarrow O_4, \quad 1 \longmapsto \mathbb{1}_4 \quad -1 \longmapsto \mathrm{diag}(-1,1,1,1). \tag{5.38}$$

Die so definierte Abbildung ist ein Homomorphismus. Dies zu zeigen ist trivial. Außerdem gilt: $\det(\mathrm{diag}(-1,1,1,1)) = -1$ und daher auch:

$$\det \circ s(1) = \det(\mathbb{1}_4) = 1 \text{ und } \det \circ s(-1) = \det(\mathrm{diag}(-1,1,1,1)) = -1. \tag{5.39}$$

Also ist gezeigt, dass $\det \circ s = \mathrm{id}_2$, die Erweiterung also eine Split-Extension ist. Nach dem Splitting-Lemma gilt jetzt:

$$O_4 = 2 \rtimes SO_4. \tag{5.40}$$

Wir führen unsere Untersuchung fort, indem wir jetzt die innere Struktur von SO_4 bestimmen. Wie schon zuvor zeigen wir zunächst, dass es nicht möglich ist diese Gruppe als direktes Produkt von $\Omega_4 \lhd SO_4$ und $SO_4/\Omega_4 \hat{=} 2$ zu schreiben, denn um dies zu ermöglichen, müsste ja wieder $2 \hat{=} \{\mathbb{1}_4, X\} \lhd SO_4$ existieren. Mit der gleichen Argumentation wie zuvor ist dies nur möglich, wenn gilt:

$$\forall Y \in SO_4 : XY = YX \Leftrightarrow X \in Z(SO_4). \tag{5.41}$$

Das Zentrum der speziellen orthogonalen Gruppe $Z(SO_4)$ besteht allerdings wieder aus der Menge $\{\pm \mathbb{1}_4\}$.

Satz 5.5. *Für das Zentrum der speziellen orthogonalen Gruppe $Z(SO_4)$ gilt:*

$$Z(SO_4) = \{\pm \mathbb{1}_4\}. \tag{5.42}$$

Beweis. An dieser Stelle sei auf die Untersuchung des Zentrums der allgemeinen orthogonalen Gruppe O_4 (Satz 4.3) verwiesen. Die beiden darin verwendeten Matrizen

$$X = \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{1}_2 \\ \mathbb{1}_2 & 0 \end{pmatrix} \in O_2, \quad X' = \begin{pmatrix} 0 & -\mathbb{1}_2 \\ \mathbb{1}_2 & 0 \end{pmatrix} \tag{5.43}$$

sind bereits in SO_4 enthalten. Wir betrachten deren Determinante und erhalten:

$$\det(X) = \det(\mathbb{1}_4) = 1 \text{ und } \det(X') = \det(\mathrm{diag}(-1,-1,1,1)) = 1. \tag{5.44}$$

Hierbei wurde verwendet, dass die Determinante als alternierende Funktion der Spaltenvektoren der Matrix aufgefasst werden kann und sich X durch zwei Transpositionen der Spaltenvektoren in $\mathbb{1}_4$ transformieren lässt, sowie X' durch zwei Transpositionen in $\mathrm{diag}(-1,-1,1,1)$ verwandelt werden kann. Weiterhin gilt für die zwei anderen verwendeten Matrizen

$$\tilde{X} = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} & 0 \\ 0 & \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix}, \quad \tilde{X}' = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} & 0 \\ 0 & \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix}, \tag{5.45}$$

$$\det(\tilde{X}) = \det(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix})^2 = (-1)^2 = 1 \text{ und } \det(\tilde{X}') = \det(\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix})^2 = 1^2 = 1. \quad (5.46)$$

Somit sind also alle verwendeten Matrizen bereits Elemente der speziellen orthogonalen Gruppe und daher lässt sich der Beweis von Satz 4.3 problemlos wiederholen, sodass $Z(SO_4) = \{\pm \mathbb{1}_4\}$ folgt. □

Die durch die Darstellungsmatrix $-\mathbb{1}_4$ beschriebene lineare Abbildung besitzt nach (4.18) auf Seite 54 allerdings Spinornorm gleich -1 und ist deshalb in Ω_4 enthalten. Demnach folgt für den einzigen Normalteiler von SO_4 mit Ordnung 2:

$$\Omega_4 \cap \{\pm \mathbb{1}_4\} = \{\pm \mathbb{1}_4\} \neq \{1\}, \quad (5.47)$$

was, wie schon zuvor, eine der Bedingungen für die Darstellung als internes direktes Produkt verletzt. Allerdings kann auch SO_4 als semidirektes Produkt dargestellt werden. Dies soll im Folgenden gezeigt werden. Hierfür wählen wir zunächst $a, b \in \mathbb{K}$, sodass

$$a^2 + b^2 = \alpha \in \bar{\mathscr{Q}}(\mathbb{K}), \quad (5.48)$$

dann besitzt der Vektor $v_\alpha = (a, b, 0, 0)^t \in \mathbb{K}^4$ offensichtlich als „Länge“ eine Nichtquadratzahl α, denn

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}^t \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = a^2 + b^2 = \alpha. \quad (5.49)$$

Zudem befindet sich der Vektor v_α innerhalb des von den Basisvektoren e_1, e_2 aufgespannten Unterraums. Jetzt betrachten wir die wie in 4.15 definierte Reflexion an v_α, R_α. Diese negiert den von v_α aufgespannten Unterraum und lässt dessen orthogonales Komplement invariant. Nun zerlegen wir den verwendeten Vektorraum in die direkte Summe $\mathbb{K}^4 = V = V_1 \oplus V_2$, wobei $V_1 = \langle e_1, e_2 \rangle, V_2 = \langle e_3, e_4 \rangle$. Weiterhin gilt $V_2 = V_1^\perp$ und da $\langle v_\alpha \rangle \subseteq V_1 \Rightarrow V_2 = V_1^\perp \subseteq \langle v_\alpha \rangle^\perp$. In V_2 wirkt R_α also wie die Identitätsabbildung. In V_1 wirkt die Reflexion an v_α dagegen wie die Reflexion am zweidimensionalen Vektor $v_{\alpha,2} = (a, b)^t$, $R_{\alpha,2}$. Daher besitzt R_α folgende Matrix-Darstellung:

$$R_\alpha = \begin{pmatrix} R_{\alpha,2} & 0 \\ 0 & \mathbb{1}_2 \end{pmatrix}. \quad (5.50)$$

Betrachtet man jetzt wieder in der orthogonalen Zerlegung von V eine lineare Abbildung, die einen Vektor mit Länge 1 in V_2 negiert und dessen orthogonales Komplement invariant lässt, beispielsweise die Reflexion an e_3, R_{e_3}, so lässt sich dies mit der gleichen Argumentation wie zuvor wie folgt darstellen:

$$R_{e_3} = \begin{pmatrix} \mathbb{1}_2 & 0 \\ 0 & R_{e_3,2} \end{pmatrix} \text{ mit } R_{e_3,2} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (5.51)$$

Sei jetzt R die Verkettung der beiden Abbildungen dann folgt:

$$R = R_\alpha \circ R_{e_3} = \begin{pmatrix} R_{\alpha,2} & 0 \\ 0 & R_{e_3,2} \end{pmatrix}. \tag{5.52}$$

Die Abbildung R kann also als Produkt einer Reflexion an einem Vektor mit Länge α und einer Reflexion an einem Vektor mit Länge 1 geschrieben werden und besitzt daher Spinornorm -1. Da beide Reflexionen selbstinvers sind, gilt auch:

$$R^{-1} = \begin{pmatrix} R_{\alpha,2}^{-1} & 0 \\ 0 & R_{e_3,2}^{-1} \end{pmatrix} = R. \tag{5.53}$$

Definiere jetzt folgende Abbildung:

$$s : 2 \longrightarrow \{\mathbb{1}_4, R\} \quad 1 \longmapsto \mathbb{1}_4 \quad \text{und} \quad -1 \longmapsto R, \tag{5.54}$$

dann ist dies offensichtlich ein Isomorphismus. Weiterhin ist die spezielle orthogonale Gruppe SO_4 eine Erweiterung der Gruppe mit zwei Elementen mit dem Kern der Spinornorm Ω_4, wie folgende kurze exakte Sequenz zeigt:

$$1 \longrightarrow \Omega_4 \xrightarrow{f} SO_4 \xrightarrow{g} 2 \longrightarrow 1, \tag{5.55}$$

wobei wieder f die Einbettung von Ω_4 in die spezielle orthogonale Gruppe und g die Spinornorm ist. Diese Sequenz kann mit der zuvor definierten Abbildung s geteilt werden, denn

$$g \circ s(-1) = g(R) = -1 \Leftrightarrow g \circ s = \mathrm{id}_2 \tag{5.56}$$

und daher folgt wieder mit dem Splitting-Lemma

$$SO_4 = 2 \rtimes \Omega_4. \tag{5.57}$$

Um die Gruppe Ω_4 weiter zu zerlegen, müssen wir eine neue Art der Gruppenerweiternug einführen, das sogenannte zentrale Produkt.

Definition 5.5. *Zentrales Produkt ([Wil09] S. 82)*
Es seien A,B Gruppen, $Z(A)$ das Zentrum von A und $Z(B)$ das von B, sowie $Z_1 \leq Z(A)$ und $Z_2 \leq Z(B)$. Weiterhin existiere

$$\phi : Z_1 \longmapsto Z_2, \tag{5.58}$$

ein Isomorphismus zwischen Z_1 und Z_2. Definiere jetzt:

$$Z = \{(a, \phi(a)^{-1}) \mid a \in Z_1\} \lhd A \times B. \tag{5.59}$$

Das zentrale Produkt der beiden Gruppen A und B ist dann die Gruppe $A \times B/Z$ und wir schreiben:

$$A \circ_\phi B = A \times B/Z. \tag{5.60}$$

Bemerkung. *Dass Z Normalteiler von $A \times B$ ist, folgt daher, dass $Z \leq Z_1 \times Z_2 \leq Z(A) \times Z(B) \leq Z(A \times B)$.*

Das zentrale Produkt entspricht also dem direkten Produkt, bis auf Herausteilen einer Untergruppe des Zentrums Z. Viele der Eigenschaften des direkten Produktes lassen sich daher, wenn auch meist abgeschwächt, auf das zentrale Produkt übertragen.

Satz 5.6. *Es seien wieder A, B zwei Gruppen, $A \times B$ bezeichne das direkte Produkt der beiden Gruppen und $A \circ B$ sei ein zentrales Produkt, konstruiert bezüglich eines Z gemäß Definition 5.5. Identifiziere nun A mit $A \times 1$ und B mit $1 \times B$ in $A \times B$, dann existiert ein surjektiver Homomorphismus ϕ zwischen $A \times B$ und $A \circ B$:*

$$\phi : A \times B \longrightarrow A \circ B \quad (a, b) \longmapsto ab. \tag{5.61}$$

Beweis. Folgt direkt aus der Definition des zentralen Produktes als Quotient und der zuvor gezeigten Existenz des kanonischen Epimorphismus. Für weitere Details siehe [Asc00] Seite 32.

□

Jetzt kann die innere Struktur des Kerns der Spinornorm Ω_4 untersucht werden. Wir erhalten folgendes Ergebnis.

Satz 5.7. *Der vierdimensionale Kern der Spinornorm Ω_4 entspricht dem zentralen Produkt aus zwei identischen Kopien von SL_2, der Gruppe der 2×2 Matrizen über $\mathbb{K}$ mit Determinante gleich 1:*

$$\Omega_4 = SL_2 \circ SL_2. \tag{5.62}$$

Beweis. Der Beweis ist an dieser Stelle unterdrückt und soll zu einem späteren Zeitpunkt der Arbeit (siehe hierfür Kapitel 6.1) nachgeholt werden. □

Bemerkung. *Das zentrale Produkt ist in diesem Fall eindeutig, denn wie das nachfolgende Lemma zeigt, gilt für das Zentrum von SL_2:*

$$Z(SL_2) = \{\pm \mathbb{1}_2\}, \tag{5.63}$$

daher besitzt $Z(SL_2)$ nur eine nichttriviale Untergruppe, nämlich $\{\pm \mathbb{1}_2\}$ und der in Definition 5.5 eingeführte Isomorphismus ist zwingend die Identität. Die Untergruppe Z ist dann von der Form:

$$Z = \{(a, a^{-1}) \mid a \in Z(SL_2)\} = \{(\mathbb{1}_2, \mathbb{1}_2), (-\mathbb{1}_2, -\mathbb{1}_2)\}. \tag{5.64}$$

Lemma 5.1. *Das Zentrum von SL_2 besteht aus den beiden skalaren Matrizen $\pm \mathbb{1}_2$.*

Beweis. Für $X \in Z(SL_2)$ gilt:

$$\forall Y \in SL_2 : XY = YX, \tag{5.65}$$

daher folgt dies insbesondere für die beiden Matrizen

$$Y = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ und } Y' = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}. \tag{5.66}$$

Jetzt folgt aus der Bedingung, dass X mit den beiden Matrizen Y und Y' kommutiert, zusammen mit der Parameterschreibweise

$$X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \tag{5.67}$$

$$XY = YX \Leftrightarrow c = 0,\ a = d \text{ und } XY' = Y'X \Leftrightarrow b = 0, a = d. \tag{5.68}$$

Insgesamt ist also $X = a\mathbb{1}_2$ und da $1 = \det(X) = a^2$, folgt $a = \pm 1$. Umgekehrt kommutiert $\pm\mathbb{1}$ offensichtlich mit jedem Element aus SL_2, was die Behauptung beweist. $\square$

Wir haben also bis jetzt gezeigt:

$$O_4 = 2 \rtimes (2 \rtimes (SL_2 \circ SL_2)). \tag{5.69}$$

Da aus der Kompositionsreihe der orthogonalen Gruppe und den vorherigen Überlegungen bereits folgt, dass $SL_2 \lhd \Omega_4$ und $\Omega_4/SL_2 \tilde{=} PSL_2$, ist Ω_4 eine Gruppenerweiterung von PSL_2 mit SL_2:

$$\Omega_4 = PSL_2.SL_2. \tag{5.70}$$

Demnach ist die Zerlegung in (5.69) noch nicht komplett, da ja SL_2 noch eine normale Untergruppe mit Ordnung 2 besitzt und diese noch herausgeteilt werden könnte. Jedoch ist die in (5.69) angegebene Zerlegung besser geeignet, um Elemente der orthogonalen Gruppe in Normalform anzugeben und die Struktur von Ω_4 weiter zu untersuchen.

5.2 Ordnung der endlichen Lorentz-Gruppe

Wir haben also bis jetzt gezeigt, dass die Lorentz-Gruppe der endlichen Raumzeit die vierdimensionale orthogonale Gruppe ist. Weiterhin haben wir eine Zerlegung von O_4 gefunden. Aus dieser lässt sich jetzt die Ordnung der orthogonalen Gruppe und damit auch die Anzahl der Lorentz-Transformationen bestimmen. Für den zweidimensionalen Fall wurde bereits gezeigt, dass für $|\mathbb{K}| = q$, gerade $q \pm 1$ Lorentz-Transformationen existieren, je nachdem ob -1 im zugrundeliegenden Körper eine Quadratzahl oder Nichtquadratzahl ist. Für den vierdimensionalen Fall kann die Gruppenordnung zusammen mit dem nachfolgenden Lemma, direkt aus der Ordnung der Kompositionsfaktoren bestimmt werden.

Lemma 5.2. *Es sei G eine Gruppenerweiterung von H mit J, das heißt $G = H.J$, dann gilt für die Ordnung von G:*

$$|G| = |H| \cdot |J|. \tag{5.71}$$

Beweis. Nach der Definition einer Gruppenerweiterung ist $G = H.J$, genau dann wenn eine kurze exakte Sequenz,

$$1 \longrightarrow J \xrightarrow{f} G \xrightarrow{g} H \longrightarrow 1 \tag{5.72}$$

existier, wobei f injektiv und g surjektiv ist, sowie $J \tilde{=} \mathrm{Bild}(f) = \mathrm{Kern}(g)$. Daher ist nach dem ersten Isomorphismentheorem $H \tilde{=} G/J$. Die Ordnung von H ist die Anzahl der Nebenklassen in G, das heißt:

$$|H| = |G/J| = |G : J|. \tag{5.73}$$

Jetzt folgt nach dem Satz von Lagrange:

$$|G| = |G : J| \cdot |J| = |H| \cdot |J|. \tag{5.74}$$

$\square$

Da die orthogonale Gruppe sukzessiv als Erweiterung der Kompositionsfaktoren aufgebaut werden kann, erhält man also deren Ordnung als Produkt der Ordnungen der Kompositionsfaktoren. Es gilt also:

$$\begin{aligned} O_4 = 2.SO_4 = 2.(2.\Omega_4) = 2.(2.(PSL_2.SL_2)) = 2.(2.(PSL_2.(PSL_2.2))) \\ \Rightarrow |O_4| = |2|^3 \cdot |PSL_2|^2. \end{aligned} \tag{5.75}$$

Natürlich besitzt die Gruppe mit zwei Elementen Ordnung zwei. Um jedoch die Ordnung von O_4 zu bestimmen, muss noch die Ordnung von PSL_2 ermittelt werden. Nach dem Satz von Lagrange erhält man für diese, da $PSL_2 = SL_2/2$:

$$|SL_2| = |PSL_2| \cdot 2 \Leftrightarrow |PSL_2| = \frac{1}{2} \cdot |SL_2|. \tag{5.76}$$

Wir müssen also die Ordnung von SL_2, der Gruppe der 2×2 Matrizen mit Determinante 1, ermitteln. Hierzu stellen wir zunächst die Elemente von SL_2 als Matrizen dar, dann gilt:

$$A \in SL_2 \Leftrightarrow A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \text{ mit } ad - bc = 1. \tag{5.77}$$

Um die Anzahl solcher Matrizen zu bestimmen, untersuchen wir, wie viele Möglichkeiten für die Wahl der Parameter a, b, c, d bestehen. Sei dazu wieder $|\mathbb{K}| = q$. Wir betrachten zuerst den Fall $a \neq 0$, dann ist nämlich

$$ad - bc = 1 \Leftrightarrow d = \frac{1 + bc}{a}. \tag{5.78}$$

Wir können also b und c frei aus $\mathbb{K}$ wählen und auch a unter der Nebenbedingung $a \neq 0$ frei bestimmen. Daher gibt es hierfür $q \cdot q \cdot (q - 1)$ Möglichkeiten. Nun sei $a = 0$, dann folgt:

$$ad - bc = 1 \Leftrightarrow c = -b^{-1} \tag{5.79}$$

und daher gilt insbesondere $b, c \neq 0$. Diesmal kann $b \neq 0$ frei gewählt werden und d unterliegt keiner Einschränkung. Es gibt also $q \cdot (q-1)$ Möglichkeiten. Somit ergibt sich die Ordnung der speziellen linearen Gruppe in zwei Dimensionen als

$$|SL_2| = q^2 \cdot (q-1) + q \cdot (q-1) = q \cdot (q+1)(q-1) = q \cdot (q^2-1) \tag{5.80}$$

und daher erhalten wir für die zugehörige projektive Gruppe:

$$|PSL_2| = \frac{1}{2} \cdot q \cdot (q^2-1). \tag{5.81}$$

Jetzt lässt sich auch die Ordnung der orthogonalen Gruppe in vier Dimensionen und damit die Anzahl der Lorentz-Transformationen berechnen:

$$|O_4| = \frac{1}{4} \cdot (q \cdot (q^2-1))^2 \cdot 8 = 2 \cdot (q \cdot (q^2-1))^2. \tag{5.82}$$

Somit ist die Anzahl der Lorentz-Transformationen der endlichen Raumzeit von der Ordnung $O(p^6)$.

5.3 Anzahl der verschiedenen Biquadriken

Die Ordnung der Lorentz-Gruppe ist von Bedeutung, da sich aus ihr die Anzahl der verschiedenen Biquadriken berechnen lässt. Somit erhält man in gewisser Weise die Anzahl an Freiheitsgraden der endlichen Raumzeittheorie. Um diese Größe zu berechnen, benötigen wir zuerst die Ordnung der vollen Automorphismengruppe der projektiven vierdimensionalen Raumzeit. Diese ist die projektive lineare Gruppe $PGL(4, \mathbb{F}_q)$, wir müssen also berechnen, wie viele projektive 5×5 Matrizen mit vollem Rang existieren. Diese können problemlos aus der Ordnung der gewöhnlich fünfdimensionalen linearen Gruppe berechnet werden, denn nach dem Satz von Lagrange gilt:

$$|PGL(n, \mathbb{F}_q)| = |GL(n+1, \mathbb{F}_q)/Z(GL(n+1, \mathbb{F}_q)| = \frac{|GL(n+1, \mathbb{F}_q)|}{|Z(GL(n+1, \mathbb{F}_q))|}. \tag{5.83}$$

Das Zentrum der linearen Gruppe besteht aus den skalaren Matrizen und besitzt deshalb Ordnung $|Z(GL(n+1, \mathbb{F}_q))| = q-1$. Um die Ordnung von $GL(n, \mathbb{F}_q)$ zu berechnen, gehen wir wie folgt vor: Es gibt gerade so viele $n \times n$ Matrizen wie es Vektoren in $\mathbb{F}_q^n$ gibt, denn die Matrizen lassen sich unter Verwendung der Vektoren als Zeilen- bzw. Spaltenvektoren konstruieren. Die so konstruierten Matrizen sind genau dann invertierbar, wenn sie Determinante ungleich 0 besitzen und dies ist genau dann der Fall, wenn die Zeilen- oder Spaltenvektoren linear unabhängig sind. Wir zählen im Folgenden die Möglichkeiten für die Spaltenvektoren mit dem ersten beginnend sukzessive durch. Es bezeichne v_i den i-ten Spaltenvektor, dann kann v_1 unter der Nebenbedingung $v_1 \neq 0$ frei gewählt werden. Es gibt daher $q^n - 1$ Möglichkeiten. Der zweite Vektor v_2 kann jetzt aus $\mathbb{F}_q^n \setminus \langle v_1 \rangle$ frei gewählt werden und es ergeben sich demnach $q^n - q$ Möglichkeiten. Allgemein kann v_{i+1}

aus $\mathbb{F}_q^n \setminus \langle v_1, ..., v_i \rangle$ frei gewählt werden und man erhält deshalb für v_{i+1} also $q^n - q^i$ Möglichkeiten. Die Ordnung von $GL(n, \mathbb{F}_q)$ ist dann das Produkt der Auswahlmöglichkeiten der Spaltenvektoren und man erhält:

$$|GL(n, \mathbb{F}_q)| = \prod_{i=0}^{n-1} (q^n - q^i), \tag{5.84}$$

und damit für die zugehörige projektive Gruppe:

$$|PGL(n-1, \mathbb{F}_q)| = \frac{1}{q-1} \prod_{i=0}^{n-1} (q^n - q^i) = q^{n-1} \cdot \prod_{i=0}^{n-2} (q^n - q^i). \tag{5.85}$$

Es sei jetzt $(Q_M, Q_{\overline{M}})$ eine beliebige Biquadrik mit Darstellungsmatrixpaar $(M, \overline{M})$. Wir haben zuvor gezeigt, dass dann eine Projektivität P existiert, sodass die Biquadrik unter der Projektivität auf die Standardbiquadrik im Zentrumspunkt abgebildet wird, es also gilt $P^{-t} M P^{-1} = \mathbb{1}_5, P^{-t} \overline{M} P^{-1} = \operatorname{diag}(\alpha \mathbb{1}_4, 1) := \bar{\mathbb{1}}_5$. Definieren wir also folgende Abbildung, zwischen der projektiven linearen Gruppe und der Menge der Biquadriken $\mathscr{B}$ der Raumzeit:

$$h : PGL(4, \mathbb{F}_q) \longrightarrow \mathscr{B}, \quad P \longmapsto (P^{-t} \mathbb{1}_5 P^{-1}, P^{-t} \bar{\mathbb{1}}_5 P^{-1}). \tag{5.86}$$

So ist diese Abbildung offensichtlich surjektiv. Allerdings ist h nicht zwingend injektiv. Betrachte nun $A, B \in PGL(4, \mathbb{F}_q)$, sodass $h(A) = h(B)$, dann folgt:

$$\begin{aligned} & h(A) = h(B) \\ \Leftrightarrow\ & A^{-t} \mathbb{1}_5 A^{-1} = B^{-t} \mathbb{1}_5 B^{-1} \text{ und } A^{-t} \bar{\mathbb{1}}_5 A^{-1} = B^{-t} \bar{\mathbb{1}}_5 B^{-1} \\ \Leftrightarrow\ & (BA^{-1})^{-t} \mathbb{1}_5 (BA^{-1})^{-1} = \mathbb{1}_5 \text{ und } (BA^{-1})^{-t} \bar{\mathbb{1}}_5 (BA^{-1})^{-1} = \bar{\mathbb{1}}_5 \\ \Leftrightarrow\ & (BA^{-1}) \in \mathscr{L} \\ \Leftrightarrow\ & \exists \Lambda \in \mathscr{L} : BA^{-1} = \Lambda \\ \Leftrightarrow\ & B = \Lambda \circ A. \end{aligned} \tag{5.87}$$

Zwei Projektivitäten werden also genau dann auf dieselbe Biquadrik abgebildet, wenn sie sich nur durch Linksmultiplikation[4] mit einer Lorentz-Transformation unterscheiden. h wird also injektiv, wenn wir die Elemente von $PGL(n, \mathbb{F}_q)$ bis auf Multiplikation mit einer Lorentz-Transformation identifizieren. Betrachte hierfür den Quotienten $PGL(n, \mathbb{F}_q)/\mathscr{L}$ und definiere die Abbildung

$$\tilde{h} : PGL(n, \mathbb{F}_q)/\mathscr{L} \longrightarrow \mathscr{B}, \quad P\Lambda \longmapsto h(P). \tag{5.88}$$

Aufgrund obiger Rechnung ist die Abbildung unabhängig vom Repräsentanten der Äquivalenzklasse $P\Lambda$ und daher wohldefiniert. Desweiteren ist $\tilde{h}$ injektiv, also folgt zusammen mit der zuvor gezeigten Surjektivität Bijektivität. Zu beachten ist allerdings hier, dass wir an keiner Stelle gezeigt haben, dass die Lorentz-Gruppe $\mathscr{L}$ ein Normalteiler von $PGL(n, \mathbb{F}_q)$

[4]Oder äquivalent Rechtsmultiplikation, da $\mathscr{L}$ Gruppenstruktur trägt.

ist, der Quotient trägt also im Allgemeinen keine Gruppenstruktur mehr. Dies ist für den hier betrachteten Fall aber auch nicht nötig. Wir haben also eine Bijektion zwischen $PGL(n, \mathbb{F}_q)/\mathscr{L}$ und $\mathscr{B}$, daher gilt:

$$|\mathscr{B}| = |PGL(n, \mathbb{F}_q)/\mathscr{L}|. \tag{5.89}$$

Nach dem Satz von Lagrange gilt zudem:

$$|PGL(n, \mathbb{F}_q)/\mathscr{L}| = \frac{|PGL(n, \mathbb{F}_q)|}{|\mathscr{L}|}. \tag{5.90}$$

Somit erhalten wir insgesamt für die Mächtigkeit der Menge der Biquadriken der vierdimensionalen projektiven Raumzeit:

$$|\mathscr{B}| = \frac{q^4 \cdot (q^5 - 1)(q^5 - q)(q^5 - q^2)(q^5 - q^3)}{2 \cdot q^2 \cdot (q^2 - 1)^2} = \frac{1}{2} \cdot q^6 \cdot (q^5 - 1)(q^5 - q^2)(q^2 + 1). \tag{5.91}$$

Die Anzahl der verschiedenen Biquadriken ist also von der Ordnung $O(p^{18})$.

6 Darstellung der Lorentz-Gruppe

Bis jetzt ist also gezeigt, dass die Lorentz-Gruppe der endlichen Raumzeit der vierdimensionalen orthogonalen Gruppe O_4 gleicht. Die im vorigen Abschnitt definierte Spinornorm lässt sich auch für die gesamte orthoghonale Gruppe definieren. Damit existieren zwei Gruppenhomomorphismen von O_4 in die Gruppe mit zwei Elementen, die Spinornorm und die Determinante. Diese unterteilen die orthogonale Gruppe in vier disjunkte Teilmengen. Die Untergruppe Ω_4, für deren Elemente sowohl Spinornorm als auch Determinante den Wert eins annehmen, sowie die Untermengen, die durch $\det^{-1}(1) \cap \mathrm{Sp}^{-1}(-1)$, $\det^{-1}(-1) \cap \mathrm{Sp}^{-1}(1)$ und $\det^{-1}(-1) \cap \mathrm{Sp}^{-1}(-1)$ beschrieben werden[1].

Im Folgenden soll Ω_4 genauer untersucht werden, da dies als physikalisch relevanter Teil der Lorentz-Gruppe interpretiert wird. Außerdem kann jedes weitere Element aus O_4 als Folge der Darstellung als semidirektes Produkt auf eindeutige Weise geschrieben werden: als Produkt eines Elementes aus Ω_4 eines Elementes mit Spinornorm -1 und eines Elementes mit Determinante -1. Bis jetzt ist Ω_4 lediglich abstrakt, als Normalteiler der orthogonalen Gruppe, definiert. Für viele Aspekte der Physik ist jedoch eine konkrete Darstellung der Gruppenelemente wünschenswert, beispielsweise als Matrizen, welche als lineare Transformationen auf einem Vektorraum wirken. Hierfür muss der Begriff einer Darstellung, sowie die Wirkung einer Gruppe zunächst genauer definiert werden.

Definition 6.1. *(Links)-Wirkung (vgl. [Ros09] S. 92 ff.)*
Es sei G eine Gruppe, sowie X eine Menge, dann nennt man eine Abbildung

$$\psi : G \times X \longrightarrow X, \quad (g, x) \longmapsto \psi(g, x) =: g.x \tag{6.1}$$

Gruppenwirkung oder Gruppenoperation, wenn folgende zwei Eigenschaften erfüllt werden:

(i) $\forall g, h \in G, x \in X : (g \circ h).x = g.(h.x)$,

(ii) $\forall x \in X : 1.x = x$.

Bemerkung. *Analog zur Linkswirkung lässt sich auch eine Rechtswirkung definieren. Aus den beiden Axiomen folgt, dass die Gruppenwirkung ein Homomorphismus von der Gruppe G in die Symmetriegruppe $\mathrm{Sym}(X)$ von X ist.*

Definition 6.2. *Darstellung (siehe [Ste12] S. 13)*
Es sei wieder G eine Gruppe und V ein Vektorraum. Eine Darstellung von G auf V ist ein Paar (ρ, V), wobei

$$\rho : G \longrightarrow GL(V) \tag{6.2}$$

ein Gruppenhomomorphismus ist.

[1] Mit $\det^{-1}$ und Sp^{-1} sind hier die Urbilder der jeweiligen Mengen bezeichnet.

Bemerkung. *Eine Darstellung ist also gerade eine Gruppenwirkung auf einem Vektorraum, wobei die Gruppe der Vektorraumautomorphismen $GL(V)$ die Symmetriegruppe* $\mathrm{Sym}(V)$ *von V ist. Das Konzept einer Gruppendarstellung dient dazu, die abstrakten Elemente einer Gruppe mit linearen Abbildungen auf einem Vektorraum und damit mit Matrizen zu identifizieren. Der Vorteil besteht darin, dass die Gruppenverknüpfung in die Matrixmultiplikation übergeführt wird und damit auch viele Methoden der linearen Algebra Anwendung finden*[2].

6.1 Der Kern der Spinornorm

Um die Gruppe Ω_4 als Matrixgruppe zu untersuchen, muss also eine Darstellung auf dem vierdimensionalen $\mathbb{K}$-Vektorraum $\mathbb{K}^4$ gefunden werden. Zunächst konstruieren wir eine vierdimensionale Darstellung des direkten Produktes $SL_2 \times SL_2$, von der wir anschließend zeigen, dass die beiden Elemente $(1,1), (-1,-1)$ trivial wirken und das Bild daher bereits isomorph zu $SL_2 \circ SL_2$ ist. Dann zeigen wir, dass diese Gruppe eine quadratische Form vom plus-Typen invariant lässt und deshalb eine Untergruppe von O_4 ist, woraus schließlich unter Betrachtung der Ordnungen Gleichheit mit Ω_4 folgt.

An dieser Stelle sei erinnert, dass zwei Vektorräume, zwischen denen eine bijektive lineare Abbildung existiert, isomorph heißen und daher im Rahmen der linearen Algebra nicht unterschieden werden, also als gleich betrachtet werden können. Sei nun $\mathbb{K}^{2\times 2}$ der Vektorraum der 2×2 Matrizen, mit Einträgen in $\mathbb{K}$. Dieser ist offensichtlich isomorph zu $\mathbb{K}^4$, denn die Abbildung

$$\mathbb{K}^{2\times 2} \ni \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^4 \tag{6.3}$$

ist natürlich ein Isomorphismus. Im Folgenden identifizieren wir $\mathbb{K}^4$ mit $\mathbb{K}^{2\times 2}$. Definiere jetzt die Abbildung

$$\begin{gathered} \rho : SL_2 \times SL_2 \longrightarrow GL(\mathbb{K}^{2\times 2}), \quad (A,B) \longmapsto \rho_{(A,B)} \\ \text{mit} \quad \rho_{(A,B)}(M) = (A,B).M = AMB^t. \end{gathered} \tag{6.4}$$

Diese Abbildung ist, wie leicht zu überprüfen ist, tatsächlich linear. Deshalb existiert für alle $(A,B) \in SL_2 \times SL_2$ ein $S_{(A,B)}$, sodass gilt:

$$\forall M \in \mathbb{K}^{2\times 2} : (A,B).M = S_{(A,B)}M. \tag{6.5}$$

Zudem ist ρ ein Homomorphismus, denn es gilt:

$$\begin{aligned} &\forall (A,B),(C,D) \in SL_2 \times SL_2 : \\ &\rho_{(A,B)} \circ \rho_{(C,D)}(M) = A(CMD^t)B^t = (AC)M(BD)^t = \rho_{(AC,BD)}(M) = \rho_{(A,B)\circ(C,D)}(M). \end{aligned} \tag{6.6}$$

[2] Manche Autoren bezeichnen das Paar (ρ, X) für eine beliebige Menge X und eine Wirkung ρ von G auf X als Darstellung von G.

Nach Definition 2.4.10 ist $(\rho, \mathbb{K}^{2\times 2})$ eine Darstellung von Ω_4. Jetzt untersuchen wir den Kern von ρ. Dieser besteht aus den Elementen aus $SL_2 \times SL_2$, für die gilt:

$$(A, B) \in \operatorname{Kern}(\rho) \lhd SL_2 \times SL_2 \Leftrightarrow \forall M \in \mathbb{K}^{2\times 2} : AMB^t = M. \tag{6.7}$$

Diese Bedingung gilt also insbesondere für die drei Matrizen

$$E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \ E_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \ E_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}. \tag{6.8}$$

Damit ergeben sich Bedingungen an die Einträge von $A, B \in SL_2$ für die gilt $(A, B) \in \operatorname{Kern}(\rho)$. Bezeichnet man jetzt diese Einträge mit

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \ B = \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix}, \tag{6.9}$$

dann folgt $AE_1B^t = E_1 \Rightarrow g, c = 0$ und $ae = 1$. Aus der zweiten Bedingung erhält man $AE_2B^t = E_2 \Rightarrow ah = 1$ und $f, c = 0$ und aus der letzten Bedingung $AE_3B^t = E_3 \Rightarrow de = 1$ sowie $g, b = 0$. Somit erhält man insgesamt:

$$A = a\mathbb{1}_2, \quad B = e\mathbb{1}_2. \tag{6.10}$$

Da aber auch gilt $A, B \in SL_2$, ist $\det(A) = a^2 = 1$ und auch $\det(B) = e^2 = 1$. Es folgt $a, e \in \{\pm 1\}$ und damit gilt zusammen mit $ae = 1$ bereits $a = e$. Somit erhalten wir $A = B = \pm\mathbb{1}_2$. Umgekehrt ist für alle $M \in \mathbb{K}^{2\times 2}$ offensichtlich $(-\mathbb{1}_2)M(-\mathbb{1}_2) = M$ und daher besteht der Kern von ρ aus den beiden Elementen:

$$\operatorname{Kern}(\rho) = \{(\mathbb{1}_2, \mathbb{1}_2), (-\mathbb{1}_2, -\mathbb{1}_2)\}. \tag{6.11}$$

Jetzt folgt mit dem ersten Isomorphismentheorem:

$$\operatorname{Bild}(\rho) \cong SL_2 \times SL_2 / \operatorname{Kern}(\rho) = SL_2 \times SL_2 / \{(\mathbb{1}_2, \mathbb{1}_2), (-\mathbb{1}_2, -\mathbb{1}_2)\} = SL_2 \circ SL_2. \tag{6.12}$$

Außerdem lassen die Elemente aus $\operatorname{Bild}(\rho)$ die Determinante invariant, denn mit dem Determinantenproduktsatz erhält man:

$$\begin{aligned} &\forall \rho_{(A,B)} \in \operatorname{Bild}(\rho) : \forall M \in \mathbb{K}^{2\times 2} \\ &\qquad \det(\rho_{(A,B)}(M)) = \det(AMB^t) = \det(A) \cdot \det(M) \cdot \det(B) = \det(M). \end{aligned} \tag{6.13}$$

Hierbei wurde verwendet, dass $A, B \in SL_2 \Rightarrow \det(A) = \det(B) = 1$. Identifizieren wir jetzt wieder wie schon zuvor $\mathbb{K}^{2\times 2} = \mathbb{K}^4$, so lässt sich die Determinante durch eine Matrix darstellen:

$$\det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = ad - bc = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix}^t \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix}. \tag{6.14}$$

Die Determinante ist also eine symmetrische Bilinearform[3]. Betrachte jetzt den durch die beiden folgenden Matrizen aufgespannten Untervektorraum:

$$U = \left\langle \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\rangle = \{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{K} \}. \tag{6.15}$$

Da offensichtlich gilt:

$$\forall u \in U : \det(u) = 0, \tag{6.16}$$

ist U ein total isotroper Unterraum. Weiterhin besitzt dieser die Dimension zwei. Damit ist der Witt-Index der Determinante gleich 2, die Determinante also vom plus-Typen, und daher folgt:

$$SL_2 \circ SL_2 \tilde{=} \,\mathrm{Bild}(\rho) \leq O_4. \tag{6.17}$$

Betrachtet man jetzt die Ordnung von $SL_2 \circ SL_2$, so erhält man unter Zuhilfenahme des Satzes von Lagrange:

$$|SL_2 \circ SL_2| = \frac{1}{2} |SL_2|^2 = |\Omega_4|. \tag{6.18}$$

und daher folgt bereits Gleichheit[4] der beiden Untergruppen der orthogonalen Gruppe (siehe hierzu [RT98] S. 357 ff.). Es gilt also:

$$SL_2 \circ SL_2 \tilde{=} \Omega_4. \tag{6.19}$$

Dieses Ergebnis kann nun genutzt werden, indem die Struktur der zweidimensionalen speziellen linearen Gruppe SL_2 untersucht wird. Anschließend lassen sich Ergebnisse dieser Untersuchung mittels der gefundenen Darstellung von $SL_2 \times SL_2$ auf Ω_4 übertragen.

6.2 Zerlegung der speziellen linearen Gruppe

Wir beginnen unsere Untersuchung, indem wir zwei disjunkte[5] Untergruppen der speziellen linearen Gruppe bestimmen. Dann zeigen wir, dass das interne Produkt der beiden Untergruppen mit SL_2 übereinstimmt und daher jedes Element aus SL_2 als Produkt zweier eindeutig bestimmter Elemente aus den beiden Untergruppen geschrieben werden kann. Zunächst sind jedoch einige weitere Definitionen nötig.

Definition 6.3. *Untergruppenprodukt (vgl. [Ros09] S. 27)*
Es sei G eine Gruppe und $S, K \leq G$ zwei Untergruppen. Das Produkt dieser beiden Untergruppen ist die Menge

$$SK := \{sk \mid s \in S, k \in K\}. \tag{6.20}$$

[3] Dies wird auch durch $\det(\lambda \cdot M) = \lambda^2 \det(M)$ deutlich.
[4] Im Sinne von Isomorphie.
[5] Disjunkt bedeutet hier, dass der Schnitt der beiden Untergruppen nur aus dem neutralen Element besteht. Disjunktheit im Sinne der Mengenlehre ist für die Untergruppen nicht möglich, da sie beide zumindest das neutrale Element beinhalten.

Bemerkung. *Im Allgemeinen ist das Produkt zweier Untergruppen selbst keine Untergruppe, da noch nicht einmal ein Abschluss unter der Gruppenverknüpfung zwingend aus der Definition folgt.*

Satz 6.1. *Es sei G eine Gruppe, $S, K \leq G$ zwei Untergruppen von G, SK bezeichne das zuvor definierte Untergruppenprodukt, dann gilt:*

- *Ist $K \lhd G$ oder $S \lhd G$ dann ist $SK = KS \leq G$.*
- *Ist $K \lhd G$ und $S \lhd G$, dann ist $SK \lhd G$.*

Beweis. Siehe für den Beweis [Ros09] S. 31 ff. □

Satz 6.2. *Es seien $S, K \leq G$, sowie $S \cap K = \{e\}$, dann gilt für die Ordnung des Produktes von S und K:*

$$|SK| = |S| \cdot |K|. \tag{6.21}$$

Beweis. Wir beweisen die Aussage, indem wir zeigen:

$$\forall s_1, s_2 \in S, k_1, k_2 \in K : s_1 k_1 = s_2 k_2 \Leftrightarrow s_1 = s_2, k_1 = k_2, \tag{6.22}$$

denn dann ist für jedes $g \in SK$ die Darstellung als Produkt eindeutig und die Aussage über die Ordnung von SK folgt unmittelbar. Es seien also $s_1, s_2 \in S$ und $k_1, k_2 \in K$, sodass gelte:

$$s_1 k_1 = s_2 k_2 = g. \tag{6.23}$$

Daraus folgt unmittelbar:

$$s_2^{-1} s_1 = k_2 k_1^{-1}. \tag{6.24}$$

Da die beiden Untergruppen aber unter Multiplikation abgeschlossen sind, also $s_2^{-1} s_1 \in S$ und $k_2 k_1^{-1} \in K$ folgt:

$$s_2^{-1} s_1 \in S \cap K \Rightarrow s_2^{-1} s_1 = e \Leftrightarrow s_1 = s_2, \tag{6.25}$$

und genauso folgt für k_1, k_2:

$$k_2 k_1^{-1} \in S \cap K \Rightarrow k_2 k_1^{-1} = e \Leftrightarrow k_2 = k_1. \tag{6.26}$$

Die beiden Produktdarstellungen von g sind also bereits gleich und die Aussage damit bewiesen. □

Betrachte jetzt die Menge der oberen Dreiecksmatrizen in SL_2:

$$B := \left\{ \begin{pmatrix} b & c \\ 0 & d \end{pmatrix} \mid b, c, d \in \mathbb{K}, bd = 1 \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} b & c \\ 0 & b^{-1} \end{pmatrix} \mid b, c \in \mathbb{K}, b \neq 0 \right\}. \tag{6.27}$$

Offensichtlich ist B eine Untergruppe von SL_2, denn es gilt:

$$\forall \begin{pmatrix} b & c \\ 0 & b^{-1} \end{pmatrix} \in B : \exists \begin{pmatrix} b^{-1} & c \\ 0 & b \end{pmatrix} \in B : \begin{pmatrix} b & c \\ 0 & b^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b^{-1} & -c \\ 0 & b \end{pmatrix} = \mathbb{1}_2, \tag{6.28}$$

jedes Element besitzt also ein Inverses in B. Zudem ist B unter der Matrixmultiplikation abgeschlossen:

$$\begin{pmatrix} b & c \\ 0 & b^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e & f \\ 0 & e^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} be & bf + ce^{-1} \\ 0 & (be)^{-1} \end{pmatrix}. \tag{6.29}$$

Hierbei wurde verwendet, dass die Multiplikation in einem Körper stets kommutativ ist. Wir haben also gezeigt, dass $B \leq SL_2$ gilt. Untersucht man jetzt die innere Struktur von B selbst, so wird deutlich, dass B einen nichttrivialen Normalteiler enthält. Um diesen zu erhalten, betrachten wir die folgende Abbildung:

$$\phi : B \longrightarrow \mathbb{K}/\{0\}, \quad \begin{pmatrix} b & c \\ 0 & b^{-1} \end{pmatrix} \longmapsto b. \tag{6.30}$$

Unter Verwendung von (6.29) ist die so definierte Abbildung offensichtlich ein Homomorphismus von B in die multiplikative Gruppe des Körpers $\mathbb{K}$. Deshalb ist der Kern von ϕ eine normale Untergruppe in B. Der Kern besteht gerade aus den Elementen mit Einsen auf der Diagonalen:

$$\text{Kern}(\phi) = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & c \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mid c \in \mathbb{K} \right\} =: N \lhd B. \tag{6.31}$$

Definieren wir nun folgende Abbildung auf dem Kern von ϕ:

$$\psi : \text{Kern}(\phi) \longrightarrow \mathbb{K}, \quad \begin{pmatrix} 1 & c \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \longmapsto c, \tag{6.32}$$

so ist dies ein Isomorphismus zwischen der additiven Gruppe des Grundkörpers $(\mathbb{K}, +)$ und N, denn ψ ist offensichtlich bijektiv und es gilt nach (6.29):

$$\psi \left(\begin{pmatrix} 1 & c \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & d \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right) = \psi \left(\begin{pmatrix} 1 & c+d \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right) = b + c. \tag{6.33}$$

Damit ist also Kern(ϕ) isomorph zur additiven Gruppe von $\mathbb{K}$. Weiterhin können die Diagonaleinträge der Matrix aus B unter der Bedingung $b \neq 0$ frei gewählt werden. Daher ist der Homomorphismus ϕ surjektiv und es gilt mit dem ersten Isomorphismentheorem:

$$(\mathbb{K}/\{0\}, \cdot) = \text{Bild}(\phi) \tilde{=} B/N. \tag{6.34}$$

Damit ist B eine Gruppenerweiterung von $(\mathbb{K}/\{0\}, \cdot)$ mit $(\mathbb{K}, +)$. Betrachte jetzt die Abbildung

$$s : \mathbb{K}/\{0\} \longrightarrow A := \left\{ \begin{pmatrix} b & 0 \\ 0 & b^{-1} \end{pmatrix} \mid b \in \mathbb{K}/\{0\} \right\}. \tag{6.35}$$

Unter Verwendung der Kommutativität der multiplikativen Gruppe von $\mathbb{K}$ folgt:

$$\begin{pmatrix} b_1 & 0 \\ 0 & b_1^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_2 & 0 \\ 0 & b_2^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 b_2 & 0 \\ 0 & (b_1 b_2)^{-1} \end{pmatrix}, \tag{6.36}$$

s ist also ein Homomorphismus und außerdem offensichtlich bijektiv. Durch den Isomorphismus s lässt sich $\mathbb{K}/\{0\} \tilde{=} B/N$ in N einbetten, und es gilt $\phi \circ s = \mathrm{id}_{\mathbb{K}/\{0\}}$. Damit teilt s also die kurze exakte Sequenz der Gruppenerweiterung und B ist eine Split-Extension von A mit N. Nach dem Splitting-Lemma gilt deshalb:

$$B = A \rtimes N \tilde{=} (\mathbb{K} \setminus \{0\}, \cdot) \rtimes (\mathbb{K}, +). \tag{6.37}$$

Da B also ein semidirektes Produkt von A und N ist, kann auch jedes Element aus B eindeutig als Produkt eines Elementes aus A und eines aus N geschrieben werden. Für die Ordnung von B folgt mit $|\mathbb{K}| = q$:

$$|B| = |N| \cdot |A| = q \cdot (q-1). \tag{6.38}$$

Nun werden wir eine weitere Untergruppe der speziellen linearen Gruppe in zwei Dimensionen untersuchen. Betrachte hierfür zunächst folgende Menge:

$$H := \{M^t M \mid M \in SL_2\}. \tag{6.39}$$

Auf H sei folgende innere zweistellige Verknüpfung definiert:

$$\circ : H \times H \longrightarrow H, \quad (M^t M, N^t N) \longmapsto M^t M \circ N^t N := M^t N^t N M = (NM)^t (NM) \in H. \tag{6.40}$$

Die letzte Gleichheit folgt aus der Tatsache, dass SL_2 eine Gruppenstruktur trägt und daher unter der inneren Verknüpfung abgeschlossen ist. Daher ist auch H unter $\circ$ abgeschlossen und die Abbildung wohldefiniert. Wir zeigen jetzt, dass das Paar bestehend aus $(H, \circ)$[6] eine Gruppe bildet. Hierfür sind die, in der Definition einer Gruppe an die innere Verknüpfung gestellten Eigenschaften explizit nachzurechnen. Wir beginnen mit der Assoziativität von $\circ$. Es seien also $M^t M, N^t N, K^t K \in H$ beliebig, dann gilt aufgrund der Assoziativität der Matrixmultiplikation:

$$\begin{aligned} (M^t M \circ N^t N) \circ K^t K = (NM)^t (NM) \circ K^t K = (KNM)^t (KNM) = \\ = M^t M \circ (KN)^t (KN) = M^t M \circ (N^t N \circ K^t K). \end{aligned} \tag{6.41}$$

Die Existenz eines neutralen Elementes ist trivial nachzuweisen:

$$\forall M^t M \in H : \mathbb{1}^t \mathbb{1} \circ M^t M = (M\mathbb{1})^t (M\mathbb{1}) = M^t M = (\mathbb{1}M)^t (\mathbb{1}M) = M^t M \circ \mathbb{1}^t \mathbb{1}. \tag{6.42}$$

[6] H kann verstanden werden als Wirkung bzw. Darstellung von SL_2 auf dem Raum der symmetrischen Bilinearformen über $\mathbb{K}^2$. Dieser wird ausgestattet mit punktweiser Skalarmultiplikation und punktweiser Addition zum Vektorraum. H beschreibt dann gerade die Basiswechsel (mit det = 1) dieses Vektorraumes.

Und auch die Existenz von Inversen ist offensichtlich. Sei hierfür wieder $M^tM \in H$ beliebig gewählt, dann ist unter Verwendung der Definition von H und der Gruppeneigenschaft von SL_2 auch $(M^{-1})^tM^{-1} \in H$ und es gilt:

$$\begin{aligned}(M^{-1})^tM^{-1} \circ M^tM = (MM^{-1})^t(MM^{-1}) = \mathbb{1}^t\mathbb{1} = \\ = (M^{-1}M)^t(M^{-1}M) = M^tM \circ (M^{-1})^tM^{-1}. \quad (6.43)\end{aligned}$$

Damit ist gezeigt, dass das Paar $(H, \circ)$ eine Gruppe bildet. Definiere jetzt folgende Abbildung von SL_2 nach H:

$$h : SL_2 \longrightarrow H, \quad M \longmapsto M^tM. \tag{6.44}$$

Für diese Abbildung gilt für zwei beliebige Elemente $M, N \in SL_2$:

$$h(NM) = (NM)^t(NM) = N^tN \circ M^tM = h(N) \circ h(M), \tag{6.45}$$

h ist also ein Homomorphismus. Der Kern von h ist damit Normalteiler von SL_2. Dieser besteht aus den Elementen, für welche gilt:

$$M \in \text{Kern}(h) \Leftrightarrow M^tM = h(M) = \mathbb{1}^t\mathbb{1} = \mathbb{1} \Leftrightarrow M \in SO_2 := \{S \in O_2 \mid \det(S) = 1\}. \tag{6.46}$$

Somit bildet die sogenannte spezielle orthogonale Gruppe einen Normalteiler in SL_2:

$$SO_2 \lhd SL_2. \tag{6.47}$$

Verwendet man nun die zuvor gefundene Parameter-Normalform der Matrizen in O_2,

$$O_2 \ni L = \begin{pmatrix} a & -\sigma\sqrt{1-a^2} \\ \sqrt{1-a^2} & \sigma a \end{pmatrix}, \tag{6.48}$$

so erhält man $\det(L) = \sigma a^2 + \sigma(1-a^2) = \sigma$. Die Normalformdarstellung der $S \in SO_2$ ergibt sich also gerade durch Einsetzen von $\sigma = 1$ in die Normalform der O_2 Matrizen:

$$SO_2 \ni S = \begin{pmatrix} a & -\sqrt{1-a^2} \\ \sqrt{1-a^2} & a \end{pmatrix}. \tag{6.49}$$

Unter Verwendung der zuvor berechneten Ordnung der zweidimensionalen orthogonalen Gruppe erhält man jetzt für die spezielle orthogonale Gruppe in zwei Dimensionen:

$$|SO_2| = \begin{cases} q+1 \text{ für } \sqrt{-1} \notin \mathbb{K} \\ q-1 \text{ für } \sqrt{-1} \in \mathbb{K} \end{cases} \tag{6.50}$$

Im Folgenden sei der Körper $\mathbb{K}$ so gewählt, dass -1 keine Wurzel besitzt. Betrachte jetzt die beiden Untergruppen der speziellen orthogonalen Gruppe, $SO_2, B \subseteq SL_2$. Diese schneiden sich offenbar nur im Einselement von SL_2, es gilt also $SO_2 \cap B = \{e\}$. Damit gilt für die Ordnung des zuvor definierten Untergruppenproduktes SO_2B:

$$|SO_2B| = |SO_2| \cdot |B| = (q+1) \cdot q \cdot (q-1) = q \cdot (q^2-1) = |SL_2|. \tag{6.51}$$

Da außerdem aufgrund der Abgeschlossenheit von SL_2 also Gruppe gilt $SO_2B \leq SL_2$, folgt aus gleicher Ordnung bereits Gleichheit. Wir haben also gezeigt, dass die Gruppe SL_2 ein Untergruppenprodukt der beiden Untergruppen SO_2 und B ist. Weil SO_2 zudem ein Normalteiler von SL_2 ist, gilt sogar nach Definition des internen semidirekten Produktes:

$$SL_2 = B \rtimes SO_2. \tag{6.52}$$

Demnach kann jedes Element auf eindeutige Weise als Produkt je eines Elementes jeder Gruppe dargestellt werden. B ist aber selbst wieder ein semidirektes Produkt. So erhält man insgesamt:

$$SL_2 = (A \rtimes N) \rtimes SO_2, \tag{6.53}$$

und daher folgt für die Elemente der zweidimensionalen speziellen linearen Gruppe:

$$\forall L \in SL_2 : \exists! a \in A, n \in N, s \in SO_2 : L = ans. \tag{6.54}$$

Es ist zu beachten, dass jetzt jede der drei Matrizen exakt einen frei wählbaren Parameter besitzt. Um dies zu verdeutlichen, schreiben wir die drei Matrizen noch einmal voll ausgeschrieben in der gefundenen Parameterschreibweise, mit den Parametern x, y, z[7].

$$\forall L \in SL_2 : \exists!\ x, z \in \mathbb{K}/\{0\}, y \in \mathbb{K} : L = \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & x^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & y \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z & -\sqrt{1-z^2} \\ \sqrt{1-z^2} & z \end{pmatrix}. \tag{6.55}$$

6.3 Produktdarstellung der Lorentz-Gruppe

Das so gefundene Ergebnis für die innere Struktur von SL_2 lässt sich jetzt leicht auf das direkte Produkt $SL_2 \times SL_2$ übertragen. Offensichtlich gilt:

$$SL_2 \times SL_2 = ((A \rtimes N) \rtimes SO_2) \times ((A \rtimes N) \rtimes SO_2). \tag{6.56}$$

Da die Elemente aus $SL_2 \times SL_2$ Paare der Form (A, B) sind, wobei $A, B \in SL_2$, erhalten wir[8]:

$$\begin{gathered} \forall (A,B) \in SL_2 \times SL_2 : \exists!\ u, x \in A, v, y \in N, w, z \in SO_2 : \\ (A,B) = (uvw, xyz) = (u,1) \circ (v,1) \circ (w,1) \circ (1,x) \circ (1,y) \circ (1,z). \end{gathered} \tag{6.57}$$

[7] z muss allerdings so gewählt werden, dass auch $\sqrt{1-z^2} \in \mathbb{K}$ gilt

[8] Da bei dem direkten Produkt $SL_2 \times e, e \times SL_2 \lhd SL_2 \times SL_2$, gilt $(u,x) = (u,1) \circ (1,x) = (1,x) \circ (u,1)$. Daher können die Elemente wie angegeben geordnet werden.

Somit erhalten wir insgesamt sechs einparametrige Elemente aus $SL_2 \times SL_2$ durch die jedes weitere Element auf eindeutige Weise als Produkt dargestellt werden kann.

Nach Satz 5.6 lässt sich dieses Ergebnis auf das zentrale Produkt $SL_2 \circ SL_2$ und damit auf Ω_4 übertragen. Um diese sechs Elemente in einer Darstellung $SL_2 \circ SL_2$ als 4×4 Matrizen von zu erhalten, berechnen wir deren Bilder unter dem in (6.4) auf Seite 78 definierten Homomorphismus ρ. Wir erhalten sechs, jeweils von einem Parameter abhängige lineare Abbildungen auf $\mathbb{K}^{2\times 2}$, von denen wir unter der Identifikation $\mathbb{K}^{2\times 2} \hat{=} \mathbb{K}^4$ die zugehörigen Darstellungsmatrizen erhalten. Wir wählen also zunächst

$$U = \begin{pmatrix} u & 0 \\ 0 & u^{-1} \end{pmatrix}, X = \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & x^{-1} \end{pmatrix} \in A, \tag{6.58}$$

$$V = \begin{pmatrix} 1 & v \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, Y = \begin{pmatrix} 1 & y \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in N, \tag{6.59}$$

$$W = \begin{pmatrix} w & -\sqrt{1-w^2} \\ \sqrt{1-w^2} & w \end{pmatrix}, Z = \begin{pmatrix} z & -\sqrt{1-z^2} \\ \sqrt{1-z^2} & z \end{pmatrix} \in SO_2. \tag{6.60}$$

Dies sind die sechs einparametrigen Elemente aus SL_2. Anschließend berechnen wir deren Bilder und erhalten folgende sechs Matrizen:

$$\rho((U,1)) = \begin{pmatrix} u & 0 & 0 & 0 \\ 0 & u & 0 & 0 \\ 0 & 0 & u^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & u^{-1} \end{pmatrix}, \quad \rho((1,X)) = \begin{pmatrix} x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & x^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x^{-1} \end{pmatrix}, \tag{6.61}$$

$$\rho((V,1)) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & v & 0 \\ 0 & 1 & 0 & v \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \rho((1,Y)) = \begin{pmatrix} 1 & y & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \tag{6.62}$$

$$\begin{gathered} \rho((W,1)) = \begin{pmatrix} w & 0 & -\sqrt{1-w^2} & 0 \\ 0 & w & 0 & -\sqrt{1-w^2} \\ \sqrt{1-w^2} & 0 & w & 0 \\ 0 & \sqrt{1-w^2} & 0 & w \end{pmatrix} \\ \rho((1,Z)) = \begin{pmatrix} z & -\sqrt{1-z^2} & 0 & 0 \\ \sqrt{1-z^2} & z & 0 & 0 \\ 0 & 0 & z & \sqrt{1-z^2} \\ 0 & 0 & \sqrt{1-z^2} & z \end{pmatrix}. \end{gathered} \tag{6.63}$$

Damit lässt sich jedes Element von Ω_4 als Produkt von sechs Matrizen der obigen Form schreiben. Wie wir jetzt zeigen werden, bleibt auch die Eindeutigkeit der Darstellung unter der Abbildung ρ erhalten. Diese ist zwar nicht injektiv, es könnte also passieren, dass zwei verschiedene Elemente, mit dementsprechend verschiedener sechselementiger Produktdarstellung, von $SL_2 \times SL_2$ unter ρ auf das gleiche Element in $SL_2 \circ SL_2$ abgebildet werden. Wir zeigen aber, dass dann auch die Bilder der Matrizen der Produktdarstellung übereinstimmen, die Darstellung in $SL_2 \circ SL_2$ also auch wieder eindeutig ist. Es gilt für $g, h \in Sl_2 \times Sl_2$ mit $g \neq h$:

$$\rho(g) = \rho(h) \Leftrightarrow \rho(g) \circ \rho(h)^{-1} = e \Leftrightarrow \rho(g \circ h^{-1}) = e \Leftrightarrow g \circ h^{-1} \in \mathrm{Kern}(\rho). \tag{6.64}$$

Hierbei haben wir verwendet, dass – wie zuvor gezeigt – gilt $\rho(h^{-1}) = \rho(h)^{-1}$. Weiterhin haben wir bereits gezeigt, dass der Kern nur aus den Elementen $(1,1)$ und $(-1,-1)$ besteht und da $g \neq h$, muss also gelten: $g = (-1,-1) \circ h$. Sei jetzt die sechselementige Produktdarstellung von g wie folgt:

$$g = (u,1) \circ (v,1) \circ (w,1) \circ (1,x) \circ (1,y) \circ (1,z), \tag{6.65}$$

so ist die von h von der Gestalt:

$$h = ((-1,-1) \circ (u,1)) \circ (v,1) \circ (w,1) \circ (1,x) \circ (1,y) \circ (1,z). \tag{6.66}$$

Da $\rho((-1,-1) \circ (u,1)) = \rho((-1,-1)) \circ \rho((u,1)) = \rho((u,1))$ stimmen die Bilder der Matrizen der Produktdarstellung wieder paarweise überein. Die Darstellung ist also eindeutig. Wir haben somit insgesamt gezeigt, dass gilt:

$$\begin{aligned} &\forall \Lambda \in \Omega_4 \tilde{=} SL_2 \circ SL_2 : \exists\, u, x \in A, v, y \in N, w, z \in SO_2 : \\ &\Lambda = \rho((u,1)) \circ \rho((v,1)) \circ \rho((w,1)) \circ \rho((1,x)) \circ \rho((1,y)) \circ \rho((1,z)). \end{aligned} \tag{6.67}$$

Jedes Element aus dem Kern der Spinornorm Ω_4 lässt sich also bis auf Isomorphie eindeutig durch das Produkt von sechs Matrizen darstellen. Es ist allerdings zu beachten, dass die hier gewählte Darstellung von Ω_4 die Darstellungsatrix der Determinante $M_{\det}$,

$$M_{\det} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \tag{6.68}$$

anstatt von $\mathbb{1}_4$ invariant lässt. Es handelt sich bei den sechs 4×4 Matrizen also nicht um orthogonale Matrizen im klassischen Sinn.

Wir können jedoch einen Isomorphismus in die Darstellung von Ω_4 als klassische orthogonale Matrizen konstruieren. An dieser Stelle sei vermerkt, dass die Lorentz-Gruppen der einzelnen Raumzeitpunkte ohnehin alle nur isomorph zur orthogonalen Gruppe sind.

Es spielt also im Wesentlichen keine Rolle, welche Darstellung von O_4 wir wählen, da, um konkrete Lorentz-Transformationen einer gegebenen Biquadrik anzugeben, die Elemente der gewählten Darstellung von O_4 zuerst noch mit einem Isomorphismus auf die entsprechende Form gebracht werden müssen. Dennoch werden wir den Isomorphismus zur Standarddarstellung der orthogonalen Gruppe explizit angeben, da man so gerade diejenigen Lorentz-Transformation erhält, die die Standardbiquadrik im Zentrumspunkt invariant lassen. Dies ist aus physikalischer Sicht insofern von Bedeutung, da wir die Raumzeit zunächst mit der Standardbiquadrik ausstatten können und später alle weiteren Biquadriken durch eine Verschiebung der Standardbiquadrik mit geeigneten Projektivitäten konstruieren können. Die Lorentz-Transformationen lassen sich dann direkt mitverschieben. Wählen wir auf $\mathbb{K}^4$ anstatt der kanonischen Basisvektoren $(e_1, ..., e_4)$ die Basis deren Basisvektoren, ausgedrückt in der kanonischen Basis, folgende Gestalt besitzen[9]:

$$\mathscr{B} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right) := (b_1, b_2, b_3, b_4)\,, \tag{6.69}$$

so besitzt die durch M_{det} beschriebene symmetrische Bilinearform auf der neuen Basis die Werte

$$\begin{aligned} b_1^t M_{\text{det}} b_1 = b_2^t M_{\text{det}} b_2 = 1, \\ b_3^t M_{\text{det}} b_3 = b_4^t M_{\text{det}} b_4 = -1. \end{aligned} \tag{6.70}$$

Die Darstellungsmatrix der Determinante besitzt in dieser Basis also Diagonalgestalt mit den Diagonaleinträgen $M'_{\text{det}} = \operatorname{diag}(1, 1, -1, -1)$. Der Basiswechsel von $\mathscr{B}$ auf die kanonische Basis wird durch die Matrix $B^{-1} = (b_1, b_2, b_3.b_4)$ beschrieben. Damit erhalten wir:

$$B^{-t} M_{\text{det}} B^{-1} = M_{\text{det}} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}. \tag{6.71}$$

Zuvor wurde $\mathbb{K}$ so gewählt, dass -1 eine Nichtquadratzahl ist. Da $\mathbb{K}$ aber ein endlicher Körper ist, können wir wie schon zuvor zwei Nichtquadratzahlen auf der Diagonalen paarweise in Einsen verwandeln. Wir wählen dafür $a, b \in \mathbb{K}$ aus, sodass gilt:

$$a^2 + b^2 = -1. \tag{6.72}$$

Nach Satz 3.8 gibt es solche a, b, allerdings hängt die genaue Gestalt dieser Elemente stark von der Wahl des Grundkörpers, beziehungsweise dessen Ordnung ab. Deshalb können a, b

[9]Die Bezeichnung für die Basis $\mathscr{B}$ ist hierbei nicht zu verwechseln mit der Bezeichnung für die Menge der Biquadriken des projektiven Raums. Aus dem Kontext sollte ersichtlich sein, wann welches Objekt gemeint ist.

ohne spezielle Wahl eines Körpers nicht genau angegeben werden. Jetzt betrachten wir die durch die Matrix

$$T^{-1} = \begin{pmatrix} \mathbb{1}_2 & 0 & 0 \\ 0 & a & -b \\ 0 & b & a \end{pmatrix} \tag{6.73}$$

beschriebene Transformation. Dann entspricht die Darstellungsmatrix der Determinante, wendet man zusätzlich zu obigem Basiswechsel die Transformation T an, bereits der 4×4 Einheitsmatrix. Es gilt also:

$$T^{-t}B^{-t}M_{\det}B^{-1}T^{-1} = (TB)^{-t}M_{\det}(TB)^{-1} = \mathbb{1}_4. \tag{6.74}$$

Sei nun $L \in O(M_{\det})$ eine Darstellungsmatrix der orthogonalen Gruppe, sodass L die Determinante invariant lässt:

$$L^t M_{\det} L = M_{\det}, \tag{6.75}$$

dann gilt offensichtlich:

$$((TB)L(TB)^{-1})^t \mathbb{1}_4 (TB)L(TB)^{-1} = \mathbb{1}_4. \tag{6.76}$$

Damit lässt sich jetzt, wie schon in den Fällen zuvor, ein Isomorphismus zwischen den beiden Darstellungen der orthogonalen Gruppe definieren:

$$\phi_{TB} : O(M_{\det}) \longrightarrow O_4, \quad L \longmapsto (TB)L(TB)^{-1}. \tag{6.77}$$

Dass dies tatsächlich ein Isomorphismus ist, folgt leicht aus der selben Rechnung, die in (2.78) auf Seite 30 und in (3.55) auf Seite 41 durchgeführt wurde. Jetzt können die Bilder der sechs einparametrigen Matrizen der Produktdarstellung von Ω_4 in $O(M_{\det})$ berechnet werden. Damit lässt sich schließlich jedes Element von Ω_4, das heißt jede orthogonale 4×4 Matrix mit Determinante und Spinornorm gleich 1, als Produkt dieser sechs Matrizen schreiben. Bezeichnen wir jetzt die Verkettung $\phi_{TB} \circ \rho =: \rho_{TB}$, um die Notation zu erleichtern, dann erhalten wir:

$$\begin{aligned} &\forall \Lambda \in \Omega_4 : \exists\, u, x \in A, v, y \in N, w, z \in SO_2 : \\ &\qquad \Lambda = \rho_{TB}(u,1) \circ \rho_{TB}(v,1) \circ \rho_{TB}(w,1) \circ \rho_{TB}(1,x) \circ \rho_{TB}(1,y) \circ \rho_{TB}(1,z). \end{aligned} \tag{6.78}$$

Und da ϕ_{TB} bijektiv ist, ist auch diese Darstellung eindeutig[10].

[10] Zwar ist die Wahl der sechs Elemente aus A, N und SO_2 nicht eindeutig, denn ρ ist nicht injektiv, aber die daraus konstruierten 4×4-Matrizen stellen jedes Element aus Ω_4 eindeutig dar.

7 Erweiterung der Lorentz-Gruppe

Wir haben also gesehen, dass jede Lorentz-Transformation als Produkt von sechs Matrizen dargestellt werden kann. Von diesen ist jede bestimmt durch Wahl eines freien Parameters. Damit decken die $2 \cdot (q \cdot (q^2 - 1))^2$ Lorentz-Transformationen also gerade sechs der 24 Freiheitsgrade ab, die die Raumzeit durch das Biquadrik-Feld erhält. Die Frage ist jetzt, wie sich die restlichen Freiheitsgrade physikalisch interpretieren lassen.

Jede Biquadrik lässt sich durch ein Verschieben der Standard-Biquadrik mit einer geeigneten Projektivität erzeugen. Die gesamte Menge der Freiheitsgrade entspricht damit gerade der Anzahl an möglichen Projektivitäten, also der Ordnung der vollen Symmetriegruppe des projektiven Raumes $PGL(\mathbb{P}^4\mathbb{F}_q)$. Wir können daher die restlichen Freiheitsgrade verstehen, indem wir die Lorentz-Gruppe Schritt für Schritt mit weiteren Untergruppen von $PGL(\mathbb{P}^4\mathbb{F}_q)$ erweitern, bis wir die volle Automorphismengruppe des projektiven Raumes erhalten. Die Untergruppen können dann gegebenenfalls als zusätzliche Symmetrien der Raumzeit interpretiert werden.

7.1 Die Poincaré-Gruppe des Standardpunktes

In $PGL(\mathbb{P}^4\mathbb{F}_q)$ kann zunächst eine weitere Untergruppe identifiziert werden: die Untergruppe der Translationen der affinen Punkte aus $\mathbb{P}^4\mathbb{F}_q$. Wir wählen zunächst $(\vec{0}^t, 1)^t$ als Hyperebenen aus. Dementsprechend kann jeder affine Punkt als $(\vec{p}^t, 1)^t$ für ein geeignetes $\vec{p} \in \mathbb{F}_q^4$ dargestellt werden. Eine Translation bezüglich des so definierten affinen Bereiches besitzt dann folgende Form (siehe [Las14] S. 47):

$$T(\vec{t}) = \begin{pmatrix} \mathbb{1}_4 & \vec{t} \\ \vec{0}^t & 1 \end{pmatrix}, \tag{7.1}$$

wobei der Translationsvektor $\vec{t} \in \mathbb{F}_q^4$ ist. Im Folgenden bezeichnen wir die Menge der Translationen dieser Form als $\mathscr{T}_{(\vec{0}^t,1)^t}$. Die Translationen aus $PGL(\mathbb{P}^4\mathbb{F}_q)$ bilden offensichtlich eine Untergruppe der projektiven linearen Gruppe, denn es gilt:

$$\forall T(\vec{t_1}), T(\vec{t_2}) \in \mathscr{T}_{(\vec{0}^t,1)^t} : T(\vec{t_1}) \circ T(\vec{t_2}) = \begin{pmatrix} \mathbb{1}_4 & \vec{t_1} \\ \vec{0}^t & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbb{1}_4 & \vec{t_2} \\ \vec{0}^t & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbb{1}_4 & \vec{t_2} + \vec{t_1} \\ \vec{0}^t & 1 \end{pmatrix} \in \mathscr{T}_{(\vec{0}^t,1)^t}. \tag{7.2}$$

Folglich gibt es zu jeder Translation eine inverse Translation:

$$\forall T(\vec{t}) \in \mathscr{T}_{(\vec{0}^t,1)^t} : \exists T(-\vec{t}) \in \mathscr{T}_{(\vec{0}^t,1)^t} : T(\vec{t}) \circ T(-\vec{t}) = \mathbb{1}_5. \tag{7.3}$$

Da außerdem offensichtlich $T(\vec{0}) = \mathbb{1}_5 \in \mathscr{T}_{(\vec{0}^t,1)^t}$ ist, bildet die Menge der Translationen eine Untergruppe. Diese ist isomorph zur abelschen Gruppe $(\mathbb{F}_q^4, +)$.
Betrachte nun die Menge der Projektivitäten, die sich aus einer Lorentz-Transformation und einer Translation zusammensetzen[1]:

$$\mathscr{P} := \{(\Lambda, T(\vec{t})) \mid \Lambda \in \mathscr{L},\ T(\vec{t}) \in \mathscr{T}_{(\vec{0}^t,1)^t}\}. \tag{7.4}$$

Wir können jede der Lorentz-Transformationen durch eine geeignete orthogonale 4×4 Matrix A darstellen:

$$\Lambda = \Lambda(A) := \begin{pmatrix} A & \vec{0} \\ \vec{0}^t & 1 \end{pmatrix}. \tag{7.5}$$

Wir definieren jetzt die Wirkung dieser Menge auf den projektiven Raum $\mathbb{P}^4\mathbb{F}_q$ wie folgt:

$$(\Lambda(A), T(\vec{t}))(p) := T \circ \Lambda(p). \tag{7.6}$$

Wir führen also zuerst die, durch die Lorentz-Transformation beschriebene Rotation aus, danach verschieben wir gemäß der Translation. Somit erhalten wir für $p = (\vec{p}^t, 1)^t$, also für einen beliebigen affinen Punkt:

$$(\Lambda(A), T(\vec{t}))(p) = \begin{pmatrix} A\vec{p} + \vec{t} \\ 1 \end{pmatrix}. \tag{7.7}$$

Betrachten wir nun ein weiteres Element $(\Lambda(B), T(\vec{u})) \in \mathscr{P}$, so gilt für die Hintereinanderausführung:

$$\begin{aligned} &\big((\Lambda(B), T(\vec{u})) \circ (\Lambda(A), T(\vec{t}))\big)(p) = (\Lambda(B), T(\vec{u})) \begin{pmatrix} A\vec{p} + \vec{t} \\ 1 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} (BA)\vec{p} + (B\vec{t} + \vec{u}) \\ 1 \end{pmatrix} = (\Lambda(BA), T(B\vec{t} + \vec{u})) = \big(\Lambda(B) \circ \Lambda(A), T(B\vec{t}) \circ T(\vec{u})\big). \end{aligned} \tag{7.8}$$

Wir haben im letzten Schritt verwendet, dass die Gruppe $\mathscr{T}_{(\vec{0}^t,1)^t}$ abelsch ist. Dies motiviert die Definition einer inneren zweistelligen Verknüpfung auf $\mathscr{P}$:

$$(\Lambda(B), T(\vec{u})) \circ (\Lambda(A), T(\vec{t})) := \big(\Lambda(B) \circ \Lambda(A), T(B\vec{t}) \circ T(\vec{u})\big). \tag{7.9}$$

Da $\mathscr{T}_{(\vec{0}^t,1)^t}$ und $\mathscr{L}$ Gruppen sind und für alle $\vec{t} \in \mathbb{F}_q^4$ natürlich auch $B\vec{t} \in \mathbb{F}_q^4$ gilt, ist die Verknüpfung wohldefiniert. Es ist allerdings noch nicht klar, welche Struktur $\mathscr{P}$ mit dieser Verknüpfung trägt.

Betrachte jetzt die für ein beliebiges $A \in \mathbb{F}_q^4$ folgendermaßen definierte Abbildung:

$$\phi_A : \mathbb{F}_q^4 \longrightarrow \mathbb{F}_q^4, \quad \vec{p} \longmapsto A\vec{p}, \tag{7.10}$$

[1] Da die Lorentz-Gruppen der verschiedenen Raumzeitpunkte alle isomorph sind, wählen wir an dieser Stelle den Standard-Zentrumspunkt $(\vec{0}^t, 1)^t$ aus. Dieser ist offensichtlich aus dem zuvor definierten, affinen Bereich des projektiven Raumes. Jetzt betrachten wir die dort angeheftete Lorentz-Gruppe.

also die durch die Matrix A beschriebene Abbildung auf $\mathbb{F}_q$. Da diese linear ist, wird ϕ_A zu einem Homomorphismus auf der abelschen Gruppe $(\mathbb{F}_q^4, +)$. Wählen wir jetzt A invertierbar, so ist die Abbildung ein Automorphismus, insbesondere gilt also $\forall A \in O_4$: $\phi_A \in \mathrm{Aut}(\mathbb{F}_q^4)$. Es lässt sich leicht folgern, dass dann für alle $\Lambda(A) \in \mathscr{L}$

$$\phi_{\Lambda(A)} : \mathscr{T}_{(\vec{0}^t,1)^t} \longrightarrow \mathscr{T}_{(\vec{0}^t,1)^t}, \quad T(\vec{t}) = \begin{pmatrix} \mathbb{1}_4 & \vec{t} \\ \vec{0}^t & 1 \end{pmatrix} \longmapsto \phi_{\Lambda(A)}(T(\vec{t})) := \begin{pmatrix} \mathbb{1}_4 & A\vec{t} \\ \vec{0}^t & 1 \end{pmatrix} = T(A\vec{t}) \tag{7.11}$$

ein Automorphismus auf $\mathscr{T}_{(\vec{0}^t,1)^t}$ ist. Definiere jetzt die folgende Abbildung:

$$\phi : \mathscr{L} \longrightarrow \mathrm{Aut}(\mathscr{T}_{(\vec{0}^t,1)^t}), \quad \Lambda(A) \longmapsto \phi(\Lambda(A)) := \phi_{\Lambda(A)}. \tag{7.12}$$

Die so definierte Abbildung ist offensichtlich ein Homomorphismus, denn für ein beliebiges $T(\vec{t}) \in \mathscr{T}_{(\vec{0}^t,1)^t}$ gilt:

$$\begin{aligned} \phi_{\Lambda(A)\circ\Lambda(B)}(T(\vec{t})) = \phi_{\Lambda(AB)}(T(\vec{t})) = T(AB\vec{t}) = \\ = \phi_{\Lambda(A)}\big(\phi_{\Lambda(B)}(T(\vec{t})\big) = \big(\phi_{\Lambda(A)} \circ \phi_{\Lambda(B)}\big)(T(\vec{t})). \end{aligned} \tag{7.13}$$

Verwenden wir dieses Ergebniss, so kann die Verknüpfung auf $\mathscr{P}$ wie folgt dargestellt werden:

$$(\Lambda(B), T(\vec{u})) \circ (\Lambda(A), T(\vec{t})) = \big(\Lambda(B) \circ \Lambda(A), \phi_{\Lambda(B)}(T(\vec{t})) \circ T(\vec{u})\big). \tag{7.14}$$

Schließlich ergibt sich jetzt unter Verwendung der Definition des semidirekten Produktes aus Satz 5.2:

$$\mathscr{P} = \mathscr{L} \rtimes_\phi \mathscr{T}_{(\vec{0}^t,1)^t}. \tag{7.15}$$

Die Gruppe $\mathscr{P}$ ist also das semidirekte Produkt aus Lorentz-Gruppe und Translationsgruppe und wird in der speziellen Relativitätstheorie als Poincaré-Gruppe bezeichnet. Sie ist dann die volle Symmetriegruppe der Raumzeit, also des Minkowski-Raums (S. 156 ff. in [Kai90]).

7.2 Die Poincaré-Gruppe für einen beliebigen Raumzeitpunkt

Wir haben die Poincaré-Gruppe allerdings bis jetzt nur im Standard-Zentrumspunkt definiert, denn in deren Konstruktion haben wir explizit die dort angeheftete Lorentz-Gruppe verwendet. Wir können diese jetzt aber auch in anderen Punkten der Raumzeit definieren. Problematisch ist dann nur die Interpretation der Polaren der entsprechenden Biquadrik als Hyperebene. Zeichnen wir durch die Wahl dieser Hyperebene einen affinen Bereich innerhalb des projektiven Raumes aus, so müssen auch die Translationen bezüglich dieses affinen Bereiches definiert werden. Dies legt nahe, die Poincaré-Gruppe zunächst nur für Punkte des affinen Bereiches $p = (\vec{0}^t, 1)^t$, deren Biquadrik $\beta(p)$ die Hyperebene $(\vec{0}^t, 1)^t$ als gemeinsame Polare besitzen, zu definieren.

Betrachte also einen beliebigen affinen Punkt $p = (\vec{p}^t, 1)^t$ und $\beta(p)$, die dort angeheftete Biquadrik. Nach Satz 3.13 existiert eine Projektivität B, für die gilt $B^{-t}\beta(p)B^{-1} = \beta((\vec{0}^t, 1)^t)$. Zudem definiert B einen Isomorphismus zwischen der Lorentz-Gruppe in p, $\mathscr{L}_p$ und der Standard-Lorentz-Gruppe $\mathscr{L}$:

$$\psi_B : \mathscr{L}_p \longrightarrow \mathscr{L}, \quad \Lambda \longmapsto \psi_B(B) := B^{-1}\Lambda B. \tag{7.16}$$

Da sowohl die Biquadrik in p als auch die Standard-Biquadrik in $(\vec{0}^t, 1)^t$ die selbe Polare $(\vec{0}^t, 1)^t$ besitzen, lässt nach Korolar 2.1 auch B diese invariant. Weiterhin ist die Abbildung

$$\phi \circ \psi_B : \mathscr{L}_p \longrightarrow \mathrm{Aut}(\mathscr{T}_{(\vec{0}^t,1)^t}) \tag{7.17}$$

ein Homomorphismus von $\mathscr{L}_p$ in die Automorphismengruppe von $\mathscr{T}_{(\vec{0}^t,1)^t}$. Jetzt können wir die Poincaré-Gruppe für einen beliebigen affinen Punkt definieren.

Definition 7.1. *Poincaré-Gruppe*
Für einen beliebigen, bezüglich der Hyperebene $(\vec{0}^t, 1)^t$ affinen Punkt[2] *des projektiven Raumes $\mathbb{P}^4\mathbb{F}_q \ni p = (\vec{p}^t, 1)^t$ ist die Poincaré-Gruppe in p definiert als*

$$\mathscr{P}_p := \mathscr{L}_p \rtimes_{\phi\circ\psi_B} \mathscr{T}_{(\vec{0}^t,1)^t}. \tag{7.18}$$

Satz 7.1. *Es sei $\mathbb{P}^4\mathbb{F}_q \ni p = (\vec{p}^t, 1)^t$ und $\mathscr{P}_p$ die Poincaré-Gruppe in p, dann gilt:*

$$\mathscr{P}_p \tilde{=} \mathscr{P}. \tag{7.19}$$

Beweis. Betrachte den zuvor definierten Isomorphismus zwischen den beiden Lorentz-Gruppen ψ_B, und definiere:

$$\psi : \mathscr{P}_p \longrightarrow \mathscr{P}, \quad (W, X) \longmapsto (\psi_B(W), X). \tag{7.20}$$

Da offensichtlich $(\psi_B(W), X) \in \mathscr{P}$, ist die Abbildung wohldefiniert und da ψ_B invertierbar ist, zudem bijektiv. Betrachte jetzt $(Y, Z) \in \mathscr{P}_p$, dann gilt:

$$\begin{aligned}\psi\big((W,X)\circ(Y,Z)\big) &= \psi\big((WY, \phi\circ\psi(W)(Z)\circ X)\big) = \big((\psi_B(WY), \phi\circ\psi(W)(Z)\circ X)\big) = \\ &= \big((\psi_B(W)\circ\psi_B(Y), \phi\circ\psi_B(W)(Z)\circ X)\big) = (\psi_B(W), X)\circ(\psi_B(Y), Z),\end{aligned} \tag{7.21}$$

wobei für die letzte Gleichheit die Definition der Multiplikation in $\mathscr{P}$ verwendet wurde. Damit ist ψ ein Isomorphismus und die Aussage bewiesen. □

[2]Beachte, dass die Definition genauso funktioniert, ist p kein affiner Punkt. Physikalische Relevanz erlangt dieses Konstrukt allerdings erst, wenn p aus dem, bezüglich der Hyperebene $(\vec{0}^t, 1)^t$, affinen Teilbereich des projektiven Raumes ausgewählt wird, denn nur dann entsprechen die Elemente der Translationsgruppe auch wirklich Translationen im klassischen Sinn.

Betrachten wir nun eine beliebige weitere Hyperebene, die durch $h_\infty \in \mathbb{P}^4\mathbb{F}_q^*$ beschrieben wird. Nach Satz 2.22 existiert dann eine Projektivität P, die h_∞ auf die Standard-Polare $(\vec{0}^t, 1)^t$ verschiebt. So können wir jetzt Translationen bezüglich einer beliebigen Hyperebene definieren, indem wir mit der inversen Projektivität zunächst auf die Standard-Hyperebene wechseln, dort wie gewohnt die Translation anwenden und anschließend wieder auf h_∞ rücktransformieren. Wir erhalten damit für die Translationsgruppe bezüglich einer beliebigen Hyperebene folgende Definition.

Definition 7.2. *Translationsgruppe*
Für eine beliebige Hyperebene $h_\infty \in \mathbb{P}^4\mathbb{F}_q$ ist die Translationsgruppe definiert als

$$\mathscr{T}_{h_\infty} := \mathrm{Bild}(\gamma_P), \tag{7.22}$$

wobei γ_P der, durch die zuvor beschriebene Projektivität induzierte, Isomorphismus zwischen $\mathscr{T}_{(\vec{0}^t,1)^t}$ und $\mathrm{Bild}(\gamma_P)$ ist:

$$\gamma_P : \mathscr{T}_{(\vec{0}^t,1)^t} \longrightarrow \mathscr{T}_{h_\infty}, \quad T \longmapsto \gamma_P(T) := P^{-1}TP. \tag{7.23}$$

Da nach (2.78) γ_P ein Isomorphismus ist folgt $\mathscr{T}_{(\vec{0}^t,1)^t} \tilde{=} \mathscr{T}_{h_\infty}$.

Es sei jetzt $p \in \mathbb{P}^4\mathbb{F}_q$ beliebig[3]. Weiterhin sei die Hyperebnene h_∞ so gewählt, dass p bezüglich dieser im Affinen liegt. Dies ist immer möglich. Da jede Pojektivität Inzidenz erhält, liegt jetzt auch das Bild von p unter der Projektivität P im Affinen, diesmal jedoch bezüglich der Hyperebene $(\vec{0}^t, 1)^t$. Somit können also die zuvor für diese Hyperebene definierten Translationen angewendet werden und $\mathscr{T}_{h_\infty}$ ist wohldefiniert. Aus γ_P können wir jetzt auch einen Isomorphismus zwischen der Automorphismengruppe von $\mathscr{T}_{(\vec{0}^t,1)^t}$ und der von $\mathscr{T}_{h_\infty}$ definieren. Sei hierfür ein beliebiges $\alpha \in \mathrm{Aut}(\mathscr{T}_{(\vec{0}^t,1)^t})$ dann definiert $\gamma_P \circ \alpha \circ \gamma_P^{-1}$ einen Automorphismus auf $\mathscr{T}_{h_\infty}$. Dies ermöglicht folgende Definition:

$$\gamma : \mathrm{Aut}(\mathscr{T}_{(\vec{0}^t,1)^t}) \longrightarrow \mathrm{Aut}(\mathscr{T}_{h_\infty}), \quad \alpha \longmapsto \gamma(\alpha) := \gamma_P \circ \alpha \circ \gamma_P^{-1}. \tag{7.24}$$

Die so definierte Abbildung ist offensichtlich ein Homomorphismus und da zudem γ_P invertierbar ist sogar ein Isomorphismus. Betrachte jetzt die Abbildung

$$\gamma \circ \phi \circ \psi_B : \mathscr{L}_p \longrightarrow \mathrm{Aut}(\mathscr{T}_{h_\infty}). \tag{7.25}$$

Diese ist ein Homomorphismus von der Lorentz-Gruppe am Punkt p in die Automorphismengruppe $\mathrm{Aut}(\mathscr{T}_{h_\infty})$. Verwenden wir diesen, so können wir schließlich die Poincaré-Gruppe für einen beliebigen Raumzeitpunkt und eine beliebige Hyperebene definieren.

Definition 7.3. *Poincaré-Gruppe*
Es sei p ein beliebiger Punkt des projektiven Raumes, und h_∞ eine Hyperebene, bezüglich derer p ein affiner Punkt ist, dann ist die Poincaré-Gruppe in p definiert als

$$\mathscr{P}_{p,h_\infty} := \mathscr{L}_p \rtimes_{\gamma\circ\phi\circ\psi_B} \mathscr{T}_{h_\infty}. \tag{7.26}$$

[3]Diesmal ist die Wahl von p auch auf keinen speziellen affinen Bereich eingeschränkt.

Satz 7.2. *Für jeden beliebigen Punkt p der Raumzeit und jede beliebige Hyperebene h_∞, bezüglich der p affin ist, gilt:*

$$\mathscr{P}_{p,h_\infty} \tilde{=} \mathscr{P}. \tag{7.27}$$

Beweis. Es seien also p und h_∞ unter den obigen Voraussetzungen beliebig gewählt. Definiere jetzt:

$$\tilde{\gamma} : \mathscr{P}_{p,h_\infty} \longrightarrow \mathscr{P}_p, \quad (W,X) \longmapsto \tilde{\gamma}((W,X) := (W, \gamma_P^{-1}(X)). \tag{7.28}$$

Seien $(W,X),(Y,Z) \in \mathscr{P}_{p,h_\infty}$ beliebig, dann gilt:

$$\begin{aligned} &\tilde{\gamma}\big((W,X)\circ(Y,Z)\big) = \tilde{\gamma}\big(WY, \gamma\circ\phi\circ\psi_B(W)(Z)\circ X\big) = \\ &= \tilde{\gamma}\big(WY, \gamma_P\circ\phi\circ\psi_B(W)\circ\gamma_P^{-1}(Z)\circ X\big) = \big(WY, \gamma_P^{-1}(\gamma_P\circ\phi\circ\psi_B(W)\circ\gamma_P^{-1}(Z)\circ X)\big) = \\ &\qquad = \big(WY, \phi\circ\psi_B(W)(\gamma_P^{-1}Z)\circ\gamma_P^{-1}(X)\big) = \tilde{\gamma}((W,X))\circ\tilde{\gamma}((Y,Z)), \end{aligned} \tag{7.29}$$

wobei wir wieder die Definition der Multiplikation in $\mathscr{P}_p$ verwendet haben. Damit ist $\tilde{\gamma}$ ein Homomorphismus und außerdem, da γ_P^{-1} invertierbar ist, bijektiv. Somit haben wir gezeigt:

$$\mathscr{P}_{p,h_\infty} \tilde{=} \mathscr{P}_p \tag{7.30}$$

und da zudem $\mathscr{P}_p \tilde{=} \mathscr{P}$, ist die behauptete Aussage bewiesen. □

Bemerkung. *Zu beachten ist an dieser Stelle, dass die Isomorphie der Poincaré-Gruppe der eines beliebigen Punktes zu $\mathscr{P}$ offensichtlich aus der Definition von $\mathscr{P}_{p,h_\infty}$ folgt, nicht aber aus deren Wirkung auf den projektiven Raum. Da aber sowohl ein Isomorphismus zwischen den entsprechenden Loerntzgruppen als auch zwischen den Translationsgruppen des beliebigen Punktes und des Standardpunktes existieren, kann diese Definition und damit die Isomorphie als natürlich angesehen werden.*

Wir haben also gezeigt, dass auch die Poincaré-Gruppen der verschiedenen Raumzeitpunkte bereits isomorph zu einer Standard-Poincaré-Gruppe sind. Weiterhin ist in jedem Raumzeitpunkt die Poincaré-Gruppe eine Erweiterung der Lorentz-Gruppe.

Betrachten wir jetzt den jeweiligen affinen Bereich als physikalisch relevanten Teil der Raumzeit, so besitzt dieser wieder die volle lineare Struktur. Auf diesem können wir die Poincaré-Gruppe jetzt als erweiterte Symmetriegruppe der metrischen Struktur der Raumzeit deuten. Die Lorentz-Transformationen bilden dabei den Teil der Poincaré-Gruppe, der die Biquadrik invariant lässt. Die Translationen verschieben die Biquadrik auf einen neuen Zentrumspunkt. Es gibt gerade so viele Translationen wie es Elemente in $\mathbb{F}_q^4$ gibt. Damit erhalten wir:

$$|\mathscr{T}_{(\vec{0}^t,1)^t}| = q^4 \tag{7.31}$$

und somit ergibt sich für die Ordnung der Poincaré-Gruppe:

$$|\mathscr{P}| = |\mathscr{L}| \cdot |\mathscr{T}_{(\vec{0}^t,1)^t}| = 2\cdot q^4 \cdot (q\cdot(q^2-1))^2. \tag{7.32}$$

Wir können also zehn der 24 Freiheitsgrade als diejenigen der Poincaré-Gruppe interpretieren.

8 Ausblick und offene Fragen

Wir haben also gesehen, dass in projektiven Räumen, die durch ein Biquadrik-Feld metrisiert werden, Lorentz-Transformationen definiert werden können. Die Lorentz-Gruppe ist in jedem Punkt isomorph zur orthogonalen Gruppe O_4. Diese lässt sich in vier disjunkte Komponenten zerlegen, von denen wir die einzige Komponente mit Untergruppenstruktur, den Kern der Spinornorm Ω_4 als physikalisch relevant interpretieren. Betrachten wir eine vierdimensionale Raumzeit so ist der Kern der Spinornorm selbst nicht einfach. Vielmehr lässt sich Ω_4 als zentrales Produkt von zwei Kopien der speziellen linearen Gruppe SL_2 darstellen. Verwenden wir jetzt die gefundene Zerlegung von SL_2, so lassen sich daraus sechs Matrizen konstruieren, von denen jede exakt einen freien Parameter beinhaltet, und die für jedes Element aus Ω_4 eine eindeutige Darstellung als Produkt von sechs solcher Matrizen liefert.

Aus der Zerlegung der Lorentz-Gruppe konnten wir deren Ordnung, also die Anzahl an Lorentz-Transformationen bestimmen. Zudem ergibt sich daraus die Anzahl der möglichen Biquadriken und damit die Anzahl an Freiheitsgraden der endlichen Raumzeit. Schließlich konnten wir die Lorentz-Gruppe unter Zuhilfenahme einer weiteren Untergruppe von $PGL(\mathbb{P}^4\mathbb{F}_q)$, der Translationsgruppe, vergrößern. Wir erhalten so die Poincaré-Gruppe. Zwar musste auch diese zunächst für jeden Raumzeitpunkt separat definiert werden, allerdings sind – wie schon zuvor die Lorentz-Gruppen – auch die Poincaré-Gruppen alle isomorph zueinander.

Allerdings bleiben einige Fragen ungeklärt. Beispielsweise ist noch unklar, wie die vier verschiedenen Komponenten der Lorentz-Gruppe zu verstehen sind und warum ein Interpretieren von Ω_4 als relevanter Teil physikalisch gerechtfertigt ist. In der speziellen Relativitätstheorie spielt hier die Auszeichnung einer Zeitrichtung eine wesentliche Rolle. Dies fehlt hier noch. Auch ist ein Ausschließen der Transformationen, die ein Tauschen der beiden Quadrikpaarpartner bewirken, genauer zu begründen. Weiterhin sind die Lorentz-Gruppen und damit die Lorentz-Transformationen nur lokal für den jeweiligen Raumzeitpunkt definiert. Eine Lorentz-Transformation, die die Biquadrik und damit Raumzeitabstände in einem gegebenen Punkt p unverändert lässt, könnte also Abstände in den unmittelbar benachbarten Punkten von p drastisch verändern. Hier könnte es möglicherweise problematisch sein, dass bis jetzt keine „Stetigkeitsbedingung“ an das Biquadrik-Feld gestellt wurde. Die Biquadriken können sich also zwischen benachbarten Punkten beliebig stark verändern. Möchte man allerdings als Kontinuumslimes der endlichen Raumzeittheorie eine Art allgemeine Relativitätstheorie erhalten, so sollten Lorentz-Transformationen Längen zumindest in einer offenen Umgebung des jeweiligen Punktes invariant lassen. Es ist daher noch zu klären, inwieweit dies bereits in der diskreten Theorie codiert sein muss.

Weiterhin haben wir mit der Identifikation der Lorentz- und Poincaré-Gruppe sechs beziehungsweise zehn der 24 Freiheitsgrade der Raumzeit verstanden. Um die restlichen 14 Freiheitsgrade zu verstehen, müssen jetzt weitere Untergruppen der vollen Automorphismengruppe bestimmt werden, damit die Poincaré-Gruppe mit diesen erweitert werden kann. Diese Untergruppen können dann physikalisch interpretiert werden, um so ein umfassenderes Verständnis der Symmetrie der so konstruierten Raumzeit zu erlangen. Womöglich können in diesen zusätzlichen Symmetriegruppen auch bereits aus anderen Bereichen der Physik bekannte Symmetrien identifiziert werden, z. B. die inneren Symmetrien der Materiefelder.

Literatur

[Wit31] Ernst Witt. “Über die Kommutativität endlicher Schiefkörper”. In: *Abhandlungen aus dem Mathematischen Seminar der Universität Hamburg* 8.1 (1931), S. 413–413. DOI: 10.1007/BF02941019.

[Kar89] G. Karpilovsky. *Clifford Theory for Group Representations*. Mathematics studies. North-Holland, 1989. ISBN: 0-444-87333-5.

[Kai90] Gerald Kaiser. *Quantum Physics, Relativity, and Complex Spacetime*. North-Holland Mathematics Studies (163). North-Holland, 1990. ISBN: 978-0444884657.

[ACC91] Shreeram S. Abhyankar, Srinivasan Chandrasekar und Vijaya Chandru. “Intersection of algebraic space curves”. In: *Discrete Applied Mathematics* 31.2 (1991), S. 81–96. DOI: 10.1016/0166-218X(91)90062-2.

[Gar95] Luis J. Garay. “Quantum gravity and minimum length”. In: *Int. J. Mod. Phys.* A10 (1995), S. 145–166. DOI: 10.1142/S0217751X95000085.

[RT98] L. J. Rylands und D. E. Taylor. “Matrix Generator for the Orthogonal Groups”. In: *Journal of Symbolic Computation* 25.3 (1998), S. 351–360. DOI: 10.1006/jsco.1997.0180.

[Asc00] M. Aschbacher. *Finite Group Theory*. Cambridge studies in advanced mathematics (10). Cambridge University Press, 2000. ISBN: 9780521786751.

[Brö03] Theodor Bröcker. *Lineare Algebra und Analytische Geometrie*. Grundstudium Mathematik. Birkhäuser, 2003. ISBN: 978-3-0348-7642-1.

[HM08] Jacques Helmstetter und Artribano Micali. *Quadratic Mappings and Clifford Algebras*. Birkhäuser, 2008. ISBN: 978-3-7643-8605-4.

[Bos09] Siegfried Bosch. *Algebra*. Springer-Lehrbuch. Springer, 2009. ISBN: 978-3-540-92811-9.

[RO09] Jürgen Richter-Gebert und Thorsten Orendt. *Geometriekalküle*. Springer-Lehrbuch. Springer, 2009. ISBN: 978-3-642-02529-7.

[Ros09] Harvey E. Rose. *A Course on Finite Groups*. Universitext. Springer, 2009. ISBN: 978-1-84882-888-9.

[Wei09] Steven H. Weintraub. *Galois Theory, Second Edition*. Universitext. Springer, 2009. ISBN: 978-0-387-87574-3.

[Wil09] Robert A. Wilson. *The Finite Simple Groups*. Graduate Texts in Mathematics. Springer, 2009. ISBN: 978-1-84800-987-5.

[Ric11] Jürgen Richter-Gebert. *Perspectives on Projective Geometry*. Springer, 2011. ISBN: 978-3-642-17285-4.

[Ueb11] Johannes Ueberberg. *Foundations of Incidence Geometry*. Springer Monographs in Mathematics. Springer, 2011. ISBN: 978-3-642-20971-0.

[Ale12] Nils Alex. *Quadriken in endlichen projektiven Ebenen*. Bachelorarbeit. 2012.

[Ste12] Benjamin Steinberg. *Representation Theory of Finite Groups*. Universitext. Springer, 2012. ISBN: 978-1-4614-0775-1.

[KB13] Peter Knabner und Wolf Barth. *Lineare Algebra*. Springer-Lehrbuch. Springer-Spektrum, 2013. ISBN: 978-3-642-32185-6.

[Pur13] S. P. Puri. *General theory of Relativity*. Pearson India, 2013. ISBN: 978-8-1-3179568-2.

[Las14] Alexander Laska. *Biquadric Fields: Equipping Finite Projektive Spaces With “Metric” Structure*. Masterarbeit. 2014.

Danksagung

Mein erster Dank richtet sich an Herrn Prof. Dr. Klaus Mecke, der es mir ermöglicht hat, diese Arbeit an seinem Lehrstuhl zu schreiben. Seine Ideen bildeten die Grundlage dieser Bachelorarbeit und er stand mir stets hilfreich zur Seite. Ich hoffe, ich konnte mit dieser Arbeit einen kleinen Beitrag zu dem Gesamtprojekt leisten.

Auch Alexander Laska sei hiermit besonders gedankt. Er unterstützte mich während der gesamten Arbeit immer wieder mit hilfreichen Ratschlägen. Er nahm sich sehr viel Zeit, mir in einer Vielzahl produktiver Gespräche und Diskussionen wertvolle Anregungen zu geben. Darüber hinaus hat er in der letzten Phase die Arbeit mehrfach gelesen und wichtige Verbesserungsvorschläge angemerkt.

Als letztes danke ich meiner Familie und meinen Freunden, besonders meiner Freundin, für die vielfältige Unterstützung während meines gesamten Studiums.

Erklärung

Hiermit erkläre ich, dass ich diese Arbeit selbständig angefertigt habe. Ich habe nach bestem Gewissen alle verwendeten Hilfsmittel und Quellen angegeben. Des Weiteren wurde diese Arbeit weder einem anderen Prüfungsamt vorgelegt noch veröffentlicht.

Ort, Datum

Unterschrift