

Zur Berechnung von Lévy-Walks mit Schritten parallel zu den Achsen

Betreuer: Prof. Dr. Michael Schmiedeberg
Institut für Theoretische Physik I, FAU Erlangen

Rafael Grub

23. August 2019

Abstract

Bei vielen realen Abläufen werden spezifische Verhaltensweisen beobachtet, deren Charakter sich mit der Zeit ändert. Dieses Verhalten kann ein Anzeichen dafür sein, dass sich einige Eigenschaften der Daten über die Zeit entwickeln oder fluktuieren. Problemstellungen dieser Art können in einer Vielzahl an Anwendungen gefunden werden, wie beispielsweise im Bereich der Biologie, der technischen Diagnostik, dem Verhalten von Tier- oder Menschenmengen, oder auch in der Physik. Aus mathematischer Sicht kann diese Komplexität in vielen Fällen durch die Anomale Diffusion mit entsprechenden Randbedingungen beschrieben werden. Diese Anomale Diffusion lässt sich wiederum häufig durch das Modell des Random Walks beschreiben, der durch Wahrscheinlichkeitsverteilungen berechnet werden kann.

Nachdem ein kurzer Überblick über die Eigenschaften und Unterschiede von Random Walk, Lévy-Walk und dem hier betrachteten Lévy-Walk, dessen Schritte in ihren Richtungen auf die Parallelität zur x - bzw. zur y -Achse eingeschränkt sind, gegeben wurde, wird im weiteren eine Wahrscheinlichkeitsverteilungsfunktion \bar{P} aufgestellt, deren Komponenten in Abhängigkeit der Wahrscheinlichkeit f für bestimmte Schrittdauern im Fourier-Laplace-Raum berechnet werden können, bevor schließlich der Ansatz für eine Rücktransformation für die Beobachtungen im Real-Raum gegeben wird.

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	3
2	Herleitung der Formeln	6
2.1	Berechnung im Fourier-Laplace-Raum	9
2.2	Rücktransformation	20
3	Zusammenfassung	20
4	Anhang	21
	A	21
	B	22
	Beweise	24
	Literatur	26

1 Einleitung

Anomale Diffusion tritt in einer Vielzahl unterschiedlicher Systeme auf und kann somit zur Beschreibung oder Untersuchung verschiedenster Mechanismen genutzt werden, wie zum Beispiel von Meerschaert und Tadjeran zur Modellierung des Transports von Partikeln durch den Fluss von Flüssigkeiten in porösen Medien, wie beispielsweise durch das Grundwasser [5] oder von Schulz und Schulz für Berechnungen zum Immissionsschutz [8]. In vielen Fällen kann die anomale Diffusion durch Continuous-Time Random Walks (CTRWs) beschrieben werden, die dadurch charakterisiert sind, dass sich ein sogenannter “Walker” von einem Ausgangspunkt startend bei jedem “Schritt” frei, oder auch unter Berücksichtigung gegebener Bedingungen, in *eine* von mehreren möglichen Richtungen bewegt. Für Gewöhnlich ist dabei die Richtung bzw. Orientierung der einzelnen Schritte beliebig, sowie zufällig verteilt, wohingegen ihre Länge als fest gesetzt gilt. Ist allerdings auch die Schrittlänge beliebig und zufällig verteilt und kann sie, wie die Richtung, durch eine Verteilungsfunktion beschrieben werden, so handelt es sich um sogenannte Lévy-Walks. In den Abbildungen (1) und (2) ist zum Vergleich der beispielhafte Pfad eines Random Walkers dem eines Lévy-Walks im Zweidimensionalen gegenübergestellt. Beide Pfade wurden hierfür durch eine einfache Simulation erzeugt.



Abbildung 1: Pfad eines Random Walks, bei dem die Richtung der Schritte beliebig und normal verteilt, die Schrittlänge jedoch immer gleich ist.

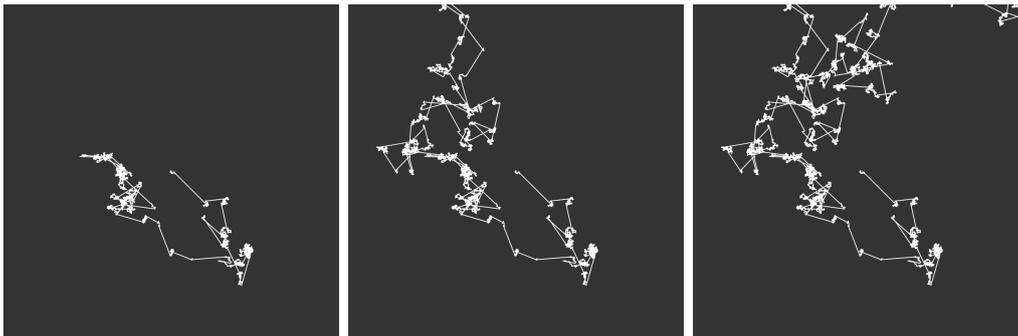


Abbildung 2: Pfad eines Lévy-Walks, bei dem sowohl die Richtung, als auch die Schrittlänge beliebig, sowie normal verteilt auftreten.

Dies führt schließlich zu unterschiedlichen Wahrscheinlichkeitsdichten für den Aufenthaltsort des Walkers zu einem bestimmten, späteren Zeitpunkt im betrachteten Raum. Die resultierende Wahrscheinlichkeitsdichten hängen dabei maßgeblich von den Eigenschaften des Walkers, wie die Verteilung von Schrittlänge u.Ä., von den äußeren Bedingungen, wie bspw. Kraftfelder oder Strömungen, oder auch möglichen Hindernissen ab. So wurde die Methode des Random Walks von Chen zur Untersuchung und Modellierung von Turbulenzen [2] eingesetzt, von Oliva, Panzieri, Setola und Gasparri zur Simulation der Verbreitung von Nachrichten über sich bewegende Gruppen [6], von Greenko, Chechkin und Shul'ga zur Untersuchung von Superdiffusion geladener Teilchen in Kristallen [3], von Bouchaud und Georges zur Konstruktion von Polymeren mittels sich selbst ausweichender Random Walker [1] und von Kang, Abdelfatah und Pournik um die Transport- und Reaktionsprozesse in porösen Materialien zu studieren [4], um nur einige Beispiele zu nennen.

Im Folgenden soll dabei der Spezialfall betrachtet werden, dass die Länge der einzelnen Schritte des Walkers wie oben beschrieben beliebig ist und zufällig verteilt auftritt, jedoch wird die Richtung der Schritte auf die nachstehenden vier Möglichkeiten eingeschränkt: "vorwärts" - und somit o.B.d.A. in positive x-Richtung, "rückwärts" - also folglich in negative x-Richtung, "nach links" - in positive y-Richtung, und "nach rechts" - in negative y-Richtung, sodass sich der Walker innerhalb eines Schritts nie diagonal bewegt. Außerdem wird hier stets das "Velocity-Model" verwendet, bei dem sich der Walker mit einer immer konstanten Geschwindigkeit v bewegt, also nie in einer Position verharret, und für einen Schritt der Länge x' die Zeit $t' = \frac{x'}{v}$ benötigt. Dies entspricht dem Lévy-Walk-Model. Der Unterschied zwischen regulären Lévy-Walks und den hier betrachteten Lévy-Walks unter Einschränkung auf die vier möglichen Richtungen ist an den beispielhaften Pfaden eines jeweils entsprechenden Walkers in den Abbildungen (3) und (4) zu sehen, die durch eine ähnliche Simulation, wie sie bereits oben genutzt wurde, entstanden sind.

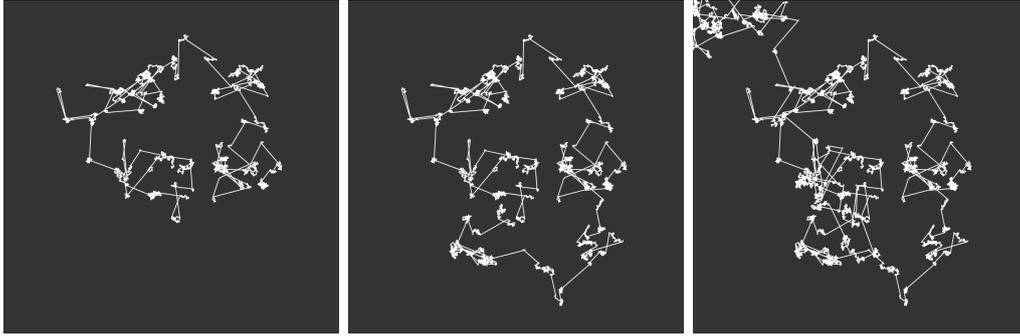


Abbildung 3: Weiterer Pfad eines regulären Lévy-Walks mit der Möglichkeit Schritte in jede beliebige Richtung zu gehen.

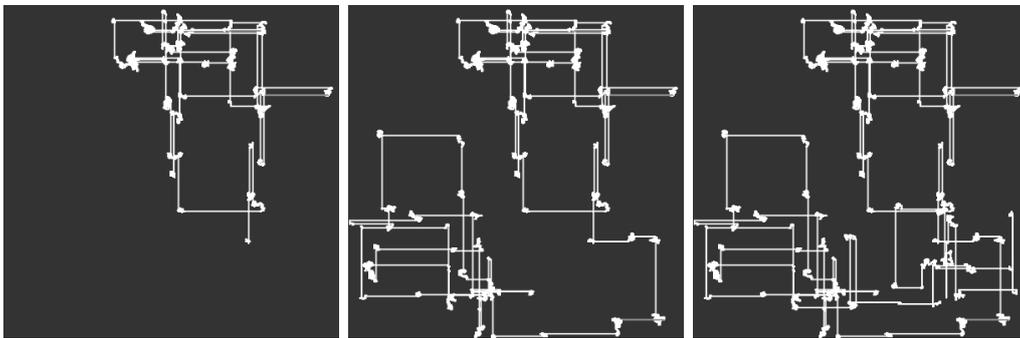


Abbildung 4: Pfad eines Lévy-Walks, bei dem jeder Schritt nur in eine der vier Richtungen Hoch, Runter, Rechts und Links gehen kann.

Des weiteren ist das Ziel in Anlehnung an die Arbeit von Prof. Dr. Michael Schmieberg, Prof. Dr. Vasily Yu Zaburdaev und Prof. Dr. Holger Stark zu Momenten und Skalierungsordnungen bei Random Walks [7] eine systematische Analyse der aus diesen Voraussetzungen resultierenden Wahrscheinlichkeitsverteilung, die nun im Vergleich zu regulären Lévy-Walks, bei denen die einzelnen Schritte nicht auf die genannten vier Richtungen eingeschränkt sind, nicht mehr isotrop zu sein hat, also nicht ausschließlich vom Abstand $|\vec{r}^j|$ zum Startpunkt abzuhängen hat.

\vec{r} bzw. x' und y' stellen dabei den Positionswechsel durch den vollzogenen Schritt dar, der mit der Wahrscheinlichkeit $g(x', y', t')$ auftritt. Da im Punkt $\vec{r} = \vec{0}$ zum Zeitpunkt $t = 0$ gestartet wird, addiert man für den ersten Schritt, der aus dieser Situation hervorgeht, den Summanden $\delta(x) \delta(y) \delta(t)$, der für alle anderen Schritte 0 ergibt. Für $Q(x, y, t)$ werden außerdem nur Schritte einer Länge $|x'| \leq vt$ bzw. $|y'| \leq vt$ zugelassen, da t die Gesamtzeit des Systems seit Beginn des ersten Schritts bezeichnet und da durch die Bewegung mit konstanter Geschwindigkeit die Lauflänge und die vergangene Zeit fest verknüpft sind, was bedeutet, dass die "Entfernung" zum Ausgangspunkt $\vec{r} = \vec{0}$, also der Betrag der Position - was $|\vec{r}|$ bezeichnet - bzw. der Betrag der Koordinaten - also $|x'|$ oder $|y'|$ - nur dann **gleich** $v \cdot t$ ist, wenn bisher nur der erste Schritt zurückgelegt wurde, oder aber alle Schritte, die bis zu diesem Zeitpunkt erfolgten, in dieselbe Richtung gingen. In allen anderen Fällen gilt $|\vec{r}| \not\leq vt$. Aus $|\vec{r}| \leq vt$ folgt direkt, dass $|x'| \leq vt$ und $|y'| \leq vt$ bzw. $|x'| < vt$ und $|y'| \leq vt$, da sich der Walker nie "diagonal" bewegen kann, sondern immer nur in $\pm x$ - oder $\pm y$ -Richtung, oder anders ausgedrückt:

$$0 < |x'| \leq vt \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{ll} |x'| = vt & \implies |y'| = 0 \\ 0 < |x'| < vt & \implies 0 < |y'| < vt \end{array} \right\} \Leftrightarrow |y'| < vt \quad (4)$$

oder entsprechend

$$|x'| < vt \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{ll} 0 < |x'| < vt & \implies 0 < |y'| < vt \\ |x'| = 0 & \implies |y'| = vt \end{array} \right\} \Leftrightarrow 0 < |y'| \leq vt, \quad (5)$$

für alle $t > 0$. Gleichheit kann also nur bei ausschließlicher Bewegung in $+$ bzw. $-x$ -Richtung oder eben in $+$ bzw. $-y$ -Richtung auftreten und selbstverständlich zu Beginn, noch vor dem ersten Schritt, dieser triviale Fall soll hier jedoch nicht weiter betrachtet werden.

Die Wahrscheinlichkeitsverteilungsfunktion $P(\vec{r}, t)$, bzw. $P(x, y, t)$ ergibt sich mit $Q(\vec{r}, t)$, bzw. $Q(x, y, t)$, sowie der Wahrscheinlichkeit

$$\begin{aligned} G(x, y, t') &= 1 - \iint dx' dy' g(x', y') \\ &= 1 - \iint dx' dy' \frac{1}{4} \left(\delta\left(t' - \frac{x'}{v}\right) \delta(y') + \delta\left(t' + \frac{x'}{v}\right) \delta(y') \right. \\ &\quad \left. + \delta(x') \delta\left(t' - \frac{y'}{v}\right) + \delta(x') \delta\left(t' + \frac{y'}{v}\right) \right) f(t'), \end{aligned} \quad (6)$$

dass die Schrittlänge größer als $|x|$, bzw. $|y|$ ist, zu:

$$\begin{aligned}
P(x, y, t) &= \iint_{|x'|, |y'| \leq vt} dx' dy' \int_0^t dt' Q(x - x', y - y', t - t') \cdot G(x', y', t') \\
&= \iint_{|x'|, |y'| \leq vt} dx' dy' \int_0^t dt' Q(x - x', y - y', t - t') \\
&\quad - \iint_{|x'|, |y'| \leq vt} dx' dy' \iint d\tilde{x} d\tilde{y} \\
&\quad \frac{1}{4} \cdot \left(Q\left(x - x', y - y', t - \frac{\tilde{x}}{v}\right) \cdot \delta(\tilde{y}) \cdot f\left(\frac{\tilde{x}}{v}\right) \right. \\
&\quad + Q\left(x - x', y - y', t + \frac{\tilde{x}}{v}\right) \cdot \delta(\tilde{y}) \cdot f\left(-\frac{\tilde{x}}{v}\right) \\
&\quad + Q\left(x - x', y - y', t - \frac{\tilde{y}}{v}\right) \cdot \delta(\tilde{x}) \cdot f\left(\frac{\tilde{y}}{v}\right) \\
&\quad \left. + Q\left(x - x', y - y', t + \frac{\tilde{y}}{v}\right) \cdot \delta(\tilde{x}) \cdot f\left(-\frac{\tilde{y}}{v}\right) \right)
\end{aligned} \tag{7}$$

(Eine ausführlichere Berechnung findet sich im Anhang unter Punkt A)

2.1 Berechnung im Fourier-Laplace-Raum

Mit Hilfe der Fourier-Laplace-Transformation und unter Anwendung der Faltungsregeln erhalten wir schließlich

$$\begin{aligned}
 \bar{P}(k_x, k_y, s) &= \mathcal{F}(\mathcal{L}(P(x, y, t))) \\
 &= \mathcal{F}\left(\mathcal{L}\left(\iint_{|x|, |y| \leq vt} dx' dy' \int_0^t dt' Q(x - x', y - y', t - t') G(x', y', t')\right)\right) \\
 \bar{P}(k_x, k_y, s) &= \bar{Q}(k_x, k_y, s) \cdot \bar{G}(k_x, k_y, s).
 \end{aligned} \tag{8}$$

Die genauere Berechnung der einzelnen Faktoren von $\bar{P}(k_x, k_y, s)$, also der Fourier-Laplace-Transformationen der Wahrscheinlichkeitsdichten $Q(x, y, t)$ und der Wahrscheinlichkeit $G(x, y, t)$ einer Schrittlänge größer als $|x|$, bzw. $|y|$ geschieht wie folgt. Zunächst berechnet sich $\bar{G}(k_x, k_y, s)$ zu

$$\begin{aligned}
 \bar{G}(k_x, k_y, s) &= \mathcal{F}(\mathcal{L}(G(x, y, t))) \\
 &= \mathcal{F}\left(\mathcal{L}\left(1 - \iint dx' dy' \frac{1}{4} \left(\delta\left(t' - \frac{x'}{v}\right) \delta(y') + \delta\left(t' + \frac{x'}{v}\right) \delta(y')\right.\right.\right. \\
 &\quad \left.\left.\left. + \delta(x') \delta\left(t' - \frac{y'}{v}\right) + \delta(x') \delta\left(t' + \frac{y'}{v}\right)\right) f(t')\right)\right) \\
 &= \mathcal{F}\left(\int_0^\infty dt' e^{-2\pi st'} \cdot \left(1 - \iint dx' dy' \frac{1}{4} \left(\delta\left(t' - \frac{x'}{v}\right) \delta(y') + \delta\left(t' + \frac{x'}{v}\right) \delta(y')\right.\right.\right. \\
 &\quad \left.\left.\left. + \delta(x') \delta\left(t' - \frac{y'}{v}\right) + \delta(x') \delta\left(t' + \frac{y'}{v}\right)\right) \cdot f(t')\right)\right) \\
 &= \mathcal{F}\left(\int_0^\infty dt' e^{-2\pi st'} \cdot 1\right. \\
 &\quad - \int_0^\infty dt' e^{-2\pi st'} \cdot \iint dx' dy' \frac{1}{4} \delta\left(t' - \frac{x'}{v}\right) \delta(y') \cdot f(t') ; x' > 0 \\
 &\quad - \int_0^\infty dt' e^{-2\pi st'} \cdot \iint dx' dy' \frac{1}{4} \cdot \delta\left(t' + \frac{x'}{v}\right) \delta(y') \cdot f(t') ; x' < 0 \\
 &\quad - \int_0^\infty dt' e^{-2\pi st'} \cdot \iint dx' dy' \frac{1}{4} \cdot \delta(x') \delta\left(t' - \frac{y'}{v}\right) \cdot f(t') ; y' > 0 \\
 &\quad \left. - \int_0^\infty dt' e^{-2\pi st'} \cdot \iint dx' dy' \frac{1}{4} \cdot \delta(x') \delta\left(t' + \frac{y'}{v}\right) \cdot f(t')\right) ; y' < 0
 \end{aligned} \tag{9}$$

$$\begin{aligned}
&= \mathcal{F} \left(\frac{1}{2\pi s} \right. \\
&\quad - \frac{1}{4} \cdot \iint dx' dy' \int_0^\infty dt' e^{-2\pi s t'} \cdot \delta \left(t' - \frac{x'}{v} \right) \delta(y') \cdot f(t') ; x' > 0 \\
&\quad - \frac{1}{4} \cdot \iint dx' dy' \int_0^\infty dt' e^{-2\pi s t'} \cdot \delta \left(t' - \frac{|x'|}{v} \right) \delta(y') \cdot f(t') ; x' < 0 \\
&\quad - \frac{1}{4} \cdot \iint dx' dy' \int_0^\infty dt' e^{-2\pi s t'} \cdot \delta(x') \delta \left(t' - \frac{y'}{v} \right) \cdot f(t') ; y' > 0 \\
&\quad \left. - \frac{1}{4} \cdot \iint dx' dy' \int_0^\infty dt' e^{-2\pi s t'} \cdot \delta(x') \delta \left(t' - \frac{|y'|}{v} \right) \cdot f(t') \right) ; y' < 0 \\
&= \mathcal{F} \left(\frac{1}{2\pi s} \right. \\
&\quad - \frac{1}{4} \cdot 2 \cdot \iint dx' dy' \int_0^\infty dt' e^{-2\pi s t'} \cdot \delta \left(t' - \frac{x'}{v} \right) \delta(y') \cdot f(t') \\
&\quad \left. - \frac{1}{4} \cdot 2 \cdot \iint dx' dy' \int_0^\infty dt' e^{-2\pi s t'} \cdot \delta(x') \delta \left(t' - \frac{y'}{v} \right) \cdot f(t') \right) \\
&= \mathcal{F} \left(\frac{1}{2\pi s} \right. \tag{10} \\
&\quad - \frac{1}{2} \cdot \iint dx' dy' e^{-2\pi s \frac{x'}{v}} \cdot \delta(y') \cdot f \left(\frac{x'}{v} \right) \\
&\quad \left. - \frac{1}{2} \cdot \iint dx' dy' e^{-2\pi s \frac{y'}{v}} \cdot \delta(x') \cdot f \left(\frac{y'}{v} \right) \right) \\
&= \mathcal{F} \left(\frac{1}{2\pi s} \right. \\
&\quad - \frac{1}{2} \cdot \int dx' e^{-2\pi s \frac{x'}{v}} \cdot 1 \cdot f \left(\frac{x'}{v} \right) \\
&\quad \left. - \frac{1}{2} \cdot \int dy' e^{-2\pi s \frac{y'}{v}} \cdot 1 \cdot f \left(\frac{y'}{v} \right) \right) \\
&= \mathcal{F} \left(\frac{1}{2\pi s} - \frac{1}{2} \cdot \int dx' e^{-2\pi s \frac{x'}{v}} \cdot f \left(\frac{x'}{v} \right) - \frac{1}{2} \cdot \int dy' e^{-2\pi s \frac{y'}{v}} \cdot f \left(\frac{y'}{v} \right) \right) \\
&= \mathcal{F} \left(\frac{1}{2\pi s} \right) - \mathcal{F} \left(\frac{1}{2} \cdot \int dx' e^{-2\pi s \frac{x'}{v}} \cdot f \left(\frac{x'}{v} \right) \right) \\
&\quad - \mathcal{F} \left(\frac{1}{2} \cdot \int dy' e^{-2\pi s \frac{y'}{v}} \cdot f \left(\frac{y'}{v} \right) \right),
\end{aligned}$$

wobei die einzelnen Fourier-Transformationen folgendes ergeben:

$$\mathcal{F} \left(\frac{1}{2\pi s} \right) (k_x, k_y) = \frac{\delta(k_x) \delta(k_y)}{2\pi s}, \tag{11}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{F} \left(\frac{1}{2} \cdot \int dx' e^{-2\pi s \frac{x'}{v}} \cdot f \left(\frac{x'}{v} \right) \right) &= \frac{\mu}{2} \cdot \mathcal{F} \left(\int dx' e^{-2\pi s \frac{x'}{v}} \cdot \frac{1}{\left(1 + \frac{x'}{v}\right)^{\mu+1}} \right) \\
&= \frac{\mu}{2} \cdot \left(\frac{\int dx' e^{-2\pi s \frac{1}{v} x'} \cdot \frac{1}{\left(1 + \frac{x'}{v}\right)^{\mu+1}} \Big|_{x'=k_x}}{i \cdot k_x} \right. \\
&\quad \left. + \pi \cdot \int dx' e^{-2\pi s \frac{x'}{v}} \cdot \frac{1}{\left(1 + \frac{x'}{v}\right)^{\mu+1}} \Big|_{x'=0} \cdot \delta(k_x) \right) \\
&= \frac{\mu}{2} \cdot \left(\frac{(2\pi)^\mu (-e^{2\pi s}) v \left(\frac{v+k_x}{v}\right)^{-\mu} \left(\frac{s(v+k_x)}{v}\right)^\mu \Gamma\left(-\mu, \frac{2\pi s(v+k_x)}{v}\right)}{i \cdot k_x} \right. \\
&\quad \left. + \pi \cdot (2\pi)^\mu \cdot (-e^{2\pi s}) \cdot v \cdot \left(\frac{v+0}{v}\right)^{-\mu} \cdot \left(\frac{s(v+0)}{v}\right)^\mu \right. \\
&\quad \left. \cdot \Gamma\left(-\mu, \frac{2\pi s(v+0)}{v}\right) \cdot \delta(k_x) \right) \\
&= \frac{\mu}{2} \cdot \left(\frac{(2\pi)^\mu (-e^{2\pi s}) v \left(\frac{v+k_x}{v}\right)^{-\mu} \left(\frac{s(v+k_x)}{v}\right)^\mu \Gamma\left(-\mu, \frac{2\pi s(v+k_x)}{v}\right)}{i \cdot k_x} \right. \\
&\quad \left. + \pi \cdot (2\pi)^\mu \cdot (-e^{2\pi s}) \cdot v \cdot s^\mu \cdot \Gamma(-\mu, 2\pi s) \cdot \delta(k_x) \right) \tag{12}
\end{aligned}$$

und analog

$$\begin{aligned}
\mathcal{F} \left(\frac{1}{2} \cdot \int dy' e^{-2\pi s \frac{y'}{v}} \cdot f \left(\frac{y'}{v} \right) \right) &= \frac{\mu}{2} \cdot \mathcal{F} \left(\int dy' e^{-2\pi s \frac{y'}{v}} \cdot \frac{1}{\left(1 + \frac{y'}{v}\right)^{\mu+1}} \right) \\
&= \frac{\mu}{2} \cdot \left(\frac{\int dy' e^{-2\pi s \frac{y'}{v}} \cdot \frac{1}{\left(1 + \frac{y'}{v}\right)^{\mu+1}} \Big|_{y'=k_y}}{i \cdot k_y} \right. \\
&\quad \left. + \pi \cdot \int dy' e^{-2\pi s \frac{y'}{v}} \cdot \frac{1}{\left(1 + \frac{y'}{v}\right)^{\mu+1}} \Big|_{y'=0} \cdot \delta(k_y) \right) \\
&\quad \cdot \Gamma \left(-\mu, \frac{2\pi s(v+0)}{v} \right) \cdot \delta(k_y) \\
&= \frac{\mu}{2} \cdot \left(\frac{(2\pi)^\mu (-e^{2\pi s}) v \left(\frac{v+k_y}{v}\right)^{-\mu} \left(\frac{s(v+k_y)}{v}\right)^\mu \Gamma \left(-\mu, \frac{2\pi s(v+k_y)}{v} \right)}{i \cdot k_y} \right. \\
&\quad \left. + \pi \cdot (2\pi)^\mu \cdot (-e^{2\pi s}) \cdot v \cdot s^\mu \cdot \Gamma(-\mu, 2\pi s) \cdot \delta(k_y) \right). \tag{13}
\end{aligned}$$

Die ausführliche Berechnung des zweiten Faktors von $\bar{P}(k_x, k_y, s)$ aus Gleichung (8) mittels der Fourier-Laplace-Transformation von $Q(x, y, t)$ verläuft durch Beachtung der Rechenregeln für Fourier- bzw. Laplace-Transformationen bei Verschiebung sowie durch lösen der auftretenden Integrale folgendermaßen:

$$\begin{aligned}
\bar{Q}(k_x, k_y, s) &= \mathcal{F}(\mathcal{L}(Q(x, y, t))) \\
&= \iint dx dy e^{i2\pi(k_x x + k_y y)} \cdot \int_0^\infty dt e^{-2\pi s t} \cdot Q(x, y, t) \\
&= \iint dx dy e^{i2\pi(k_x x + k_y y)} \cdot \int_0^\infty dt e^{-2\pi s t} \cdot \iint dx' dy' \\
&\quad \left(Q\left(x - x', y - y', t - \frac{x'}{v}\right) \cdot \delta(y') f\left(\frac{x'}{v}\right) \right. \\
&\quad + Q\left(x - x', y - y', t + \frac{x'}{v}\right) \cdot \delta(y') f\left(-\frac{x'}{v}\right) \\
&\quad + Q\left(x - x', y - y', t - \frac{y'}{v}\right) \cdot \delta(x') f\left(\frac{y'}{v}\right) \\
&\quad \left. + Q\left(x - x', y - y', t + \frac{y'}{v}\right) \cdot \delta(x') f\left(-\frac{y'}{v}\right) \right) + \delta(x) \delta(y) \delta(t) \\
&= \iint dx dy e^{i2\pi(k_x x + k_y y)} \cdot \iint dx' dy' \\
&\quad \cdot \underbrace{\int_0^\infty dt e^{-2\pi s t}}_{\text{Laplace-Trafo}} \cdot \left(Q\left(x - x', y - y', t, \underbrace{-\frac{x'}{v}}_{\text{Verschiebung}}\right) \cdot \delta(y') f\left(\frac{x'}{v}\right) \right. \\
&\quad + Q\left(x - x', y - y', t, \underbrace{+\frac{x'}{v}}_{\text{Versch.}}\right) \cdot \delta(y') f\left(-\frac{x'}{v}\right) \\
&\quad + Q\left(x - x', y - y', t, \underbrace{-\frac{y'}{v}}_{\text{Versch.}}\right) \cdot \delta(x') f\left(\frac{y'}{v}\right) \\
&\quad \left. + Q\left(x - x', y - y', t, \underbrace{+\frac{y'}{v}}_{\text{Versch.}}\right) \cdot \delta(x') f\left(-\frac{y'}{v}\right) \right) + \delta(x) \delta(y) \delta(t)
\end{aligned} \tag{14}$$

$$\begin{aligned}
&= \iint dx dy \iint dx' dy' e^{i2\pi(k_x x + k_y y)} \\
&\quad \cdot \left(e^{-2\pi s \frac{x'}{v}} \cdot \tilde{Q}(x - x', y - y', s) \cdot \delta(y') f\left(\frac{x'}{v}\right) \right. \\
&\quad + e^{2\pi s \frac{x'}{v}} \cdot \tilde{Q}(x - x', y - y', s) \cdot \delta(y') f\left(-\frac{x'}{v}\right) \\
&\quad + e^{-2\pi s \frac{y'}{v}} \cdot \tilde{Q}(x - x', y - y', s) \cdot \delta(x') f\left(\frac{y'}{v}\right) \\
&\quad \left. + e^{2\pi s \frac{y'}{v}} \cdot \tilde{Q}(x - x', y - y', s) \cdot \delta(x') f\left(-\frac{y'}{v}\right) \right) + \delta(x) \delta(y) \cdot 1 \\
&= \iint dx' dy' \underbrace{\iint dx dy e^{i2\pi(k_x x + k_y y)}}_{\text{Fourier-Trafo}} \\
&\quad \cdot \left(e^{-2\pi s \frac{x'}{v}} \cdot \tilde{Q}\left(\underbrace{x - x'}_{\text{Versch.}}, \underbrace{y - y'}_{\text{Versch.}}, s\right) \cdot \delta(y') f\left(\frac{x'}{v}\right) \right. \\
&\quad + e^{2\pi s \frac{x'}{v}} \cdot \tilde{Q}\left(\underbrace{x - x'}_{\text{Versch.}}, \underbrace{y - y'}_{\text{Versch.}}, s\right) \cdot \delta(y') f\left(-\frac{x'}{v}\right) \\
&\quad + e^{-2\pi s \frac{y'}{v}} \cdot \tilde{Q}\left(\underbrace{x - x'}_{\text{Versch.}}, \underbrace{y - y'}_{\text{Versch.}}, s\right) \cdot \delta(x') f\left(\frac{y'}{v}\right) \\
&\quad \left. + e^{-2\pi s \frac{y'}{v}} \cdot \tilde{Q}\left(\underbrace{x - x'}_{\text{Versch.}}, \underbrace{y - y'}_{\text{Versch.}}, s\right) \cdot \delta(x') f\left(-\frac{y'}{v}\right) \right) + \delta(x) \delta(y) \\
&= \iint dx' dy' \left(e^{-i2\pi(k_x x' + k_y y')} \cdot e^{-2\pi s \frac{x'}{v}} \cdot \bar{Q}(k_x, k_y, s) \cdot \delta(y') f\left(\frac{x'}{v}\right) \right. \\
&\quad + e^{-i2\pi(k_x x' + k_y y')} \cdot e^{2\pi s \frac{x'}{v}} \cdot \bar{Q}(k_x, k_y, s) \cdot \delta(y') f\left(-\frac{x'}{v}\right) \\
&\quad + e^{-i2\pi(k_x x' + k_y y')} \cdot e^{-2\pi s \frac{y'}{v}} \cdot \bar{Q}(k_x, k_y, s) \cdot \delta(x') f\left(\frac{y'}{v}\right) \\
&\quad \left. + e^{-i2\pi(k_x x' + k_y y')} \cdot e^{2\pi s \frac{y'}{v}} \cdot \bar{Q}(k_x, k_y, s) \cdot \delta(x') f\left(-\frac{y'}{v}\right) \right) + 1 \cdot 1
\end{aligned} \tag{15}$$

Zur weiteren Berechnung wird eine zusätzliche Fourier-Transformation und -Rücktransformation eingefügt:

$$\begin{aligned}
&= \iint dx' dy' \bar{Q}(k_x, k_y, s) \\
&\quad \cdot \left(\mathcal{F}^{-1} \left(\mathcal{F} \left(f \left(\frac{x''}{v} \right) \right) (k'_x, k'_y) \right) (x', y') \cdot e^{-i2\pi(k_x x' + k_y y')} \cdot e^{-2\pi s \frac{x'}{v}} \cdot \delta(y') \right. \\
&\quad + \mathcal{F}^{-1} \left(\mathcal{F} \left(f \left(-\frac{x''}{v} \right) \right) (k'_x, k'_y) \right) (x', y') \cdot e^{-i2\pi(k_x x' + k_y y')} \cdot e^{2\pi s \frac{x'}{v}} \cdot \delta(y') \\
&\quad + \mathcal{F}^{-1} \left(\mathcal{F} \left(f \left(\frac{y''}{v} \right) \right) (k'_x, k'_y) \right) (x', y') \cdot e^{-i2\pi(k_x x' + k_y y')} \cdot e^{-2\pi s \frac{y'}{v}} \cdot \delta(x') \\
&\quad \left. + \mathcal{F}^{-1} \left(\mathcal{F} \left(f \left(-\frac{y''}{v} \right) \right) (k'_x, k'_y) \right) (x', y') \cdot e^{-i2\pi(k_x x' + k_y y')} \cdot e^{2\pi s \frac{y'}{v}} \cdot \delta(x') \right) \\
&\quad + 1 \\
&= \iint dx' dy' \bar{Q}(k_x, k_y, s) \\
&\quad \cdot \left(\iint dk'_x dk'_y e^{i2\pi(k'_x \cdot x' + k'_y \cdot y')} \mathcal{F} \left(f \left(\frac{x''}{v} \right) \right) (k'_x, k'_y) \right. \\
&\quad \cdot e^{-i2\pi(k_x x' + k_y y')} \cdot e^{-2\pi s \frac{x'}{v}} \cdot \delta(y') \\
&\quad + \iint dk'_x dk'_y e^{i2\pi(k'_x \cdot x' + k'_y \cdot y')} \mathcal{F} \left(f \left(-\frac{x''}{v} \right) \right) (k'_x, k'_y) \\
&\quad \cdot e^{-i2\pi(k_x x' + k_y y')} \cdot e^{2\pi s \frac{x'}{v}} \cdot \delta(y') \\
&\quad + \iint dk'_x dk'_y e^{i2\pi(k'_x \cdot x' + k'_y \cdot y')} \mathcal{F} \left(f \left(\frac{y''}{v} \right) \right) (k'_x, k'_y) \\
&\quad \cdot e^{-i2\pi(k_x x' + k_y y')} \cdot e^{-2\pi s \frac{y'}{v}} \cdot \delta(x') \\
&\quad \left. + \iint dk'_x dk'_y e^{i2\pi(k'_x \cdot x' + k'_y \cdot y')} \mathcal{F} \left(f \left(-\frac{y''}{v} \right) \right) (k'_x, k'_y) \right. \\
&\quad \left. \cdot e^{-i2\pi(k_x x' + k_y y')} \cdot e^{2\pi s \frac{y'}{v}} \cdot \delta(x') \right) + 1 \\
&= \iint dk'_x dk'_y \iint dx' dy' \bar{Q}(k_x, k_y, s) \\
&\quad \cdot \left(\mathcal{F} \left(f \left(\frac{x''}{v} \right) \right) (k'_x, k'_y) \cdot e^{i2\pi x' (k'_x - k_x + \frac{i2\pi s}{v})} \cdot e^{i2\pi y' (k'_y - k_y)} \cdot \delta(y') \right. \\
&\quad + \mathcal{F} \left(f \left(-\frac{x''}{v} \right) \right) (k'_x, k'_y) \cdot e^{i2\pi x' (k'_x - k_x - \frac{i2\pi s}{v})} \cdot e^{i2\pi y' (k'_y - k_y)} \cdot \delta(y') \\
&\quad + \mathcal{F} \left(f \left(\frac{y''}{v} \right) \right) (k'_x, k'_y) \cdot e^{i2\pi x' (k'_x - k_x)} \cdot e^{i2\pi y' (k'_y - k_y + \frac{i2\pi s}{v})} \cdot \delta(x') \\
&\quad \left. + \mathcal{F} \left(f \left(-\frac{y''}{v} \right) \right) (k'_x, k'_y) \cdot e^{i2\pi x' (k'_x - k_x)} \cdot e^{i2\pi y' (k'_y - k_y - \frac{i2\pi s}{v})} \cdot \delta(x') \right) + 1
\end{aligned} \tag{16}$$

$$\begin{aligned}
&= \iint dk'_x dk'_y \bar{Q}(k_x, k_y, s) \\
&\quad \cdot \left(\mathcal{F} \left(f \left(\frac{x''}{v} \right) \Big|_{y''=0} \right) (k'_x, k'_y) \cdot \delta \left(k'_x - k_x + \frac{i2\pi s}{v} \right) \cdot e^{i2\pi \cdot 0 \cdot (k'_y - k_y)} \right. \\
&\quad + \mathcal{F} \left(f \left(-\frac{x''}{v} \right) \Big|_{y''=0} \right) (k'_x, k'_y) \cdot \delta \left(k'_x - k_x - \frac{i2\pi s}{v} \right) \cdot e^{i2\pi \cdot 0 \cdot (k'_y - k_y)} \\
&\quad + \mathcal{F} \left(f \left(\frac{y''}{v} \right) \Big|_{x''=0} \right) (k'_x, k'_y) \cdot e^{i2\pi \cdot 0 \cdot (k'_x - k_x)} \cdot \delta \left(k'_y - k_y + \frac{i2\pi s}{v} \right) \\
&\quad \left. + \mathcal{F} \left(f \left(-\frac{y''}{v} \right) \Big|_{x''=0} \right) (k'_x, k'_y) \cdot e^{i2\pi \cdot 0 \cdot (k'_x - k_x)} \cdot \delta \left(k'_y - k_y - \frac{i2\pi s}{v} \right) \right) + 1 \\
&= \iint dk'_x dk'_y \bar{Q}(k_x, k_y, s) \\
&\quad \cdot \left(\mathcal{F} \left(f \left(\frac{x''}{v} \right) \Big|_{y''=0} \right) (k'_x, k'_y) \cdot \delta \left(k'_x - k_x + \frac{i2\pi s}{v} \right) \cdot 1 \right. \\
&\quad + \mathcal{F} \left(f \left(-\frac{x''}{v} \right) \Big|_{y''=0} \right) (k'_x, k'_y) \cdot \delta \left(k'_x - k_x - \frac{i2\pi s}{v} \right) \cdot 1 \\
&\quad + \mathcal{F} \left(f \left(\frac{y''}{v} \right) \Big|_{x''=0} \right) (k'_x, k'_y) \cdot 1 \cdot \delta \left(k'_y - k_y + \frac{i2\pi s}{v} \right) \\
&\quad \left. + \mathcal{F} \left(f \left(-\frac{y''}{v} \right) \Big|_{x''=0} \right) (k'_x, k'_y) \cdot 1 \cdot \delta \left(k'_y - k_y - \frac{i2\pi s}{v} \right) \right) + 1
\end{aligned} \tag{17}$$

$$\begin{aligned}
& = \bar{Q}(k_x, k_y, s) \cdot \underbrace{\mathcal{F} \left(\underbrace{f \left(\frac{x''}{v} \right) \Big|_{y''=0}}_{=:A_1} \right) \left(\underbrace{k_x - \frac{i2\pi s}{v}, k_y}_{=: \alpha_1} \right)}_{=: \bar{f}_{A_1, \alpha_1}(k_x, k_y, s)} \\
& + \bar{Q}(k_x, k_y, s) \cdot \underbrace{\mathcal{F} \left(\underbrace{f \left(-\frac{x''}{v} \right) \Big|_{y''=0}}_{=:A_2} \right) \left(\underbrace{k_x + \frac{i2\pi s}{v}, k_y}_{=: \alpha_2} \right)}_{=: \bar{f}_{A_2, \alpha_2}(k_x, k_y, s)} \\
& + \bar{Q}(k_x, k_y, s) \cdot \underbrace{\mathcal{F} \left(\underbrace{f \left(\frac{y''}{v} \right) \Big|_{x''=0}}_{=:B_1} \right) \left(\underbrace{k_x, k_y - \frac{i2\pi s}{v}}_{=: \beta_1} \right)}_{=: \bar{f}_{B_1, \beta_1}(k_x, k_y, s)} \\
& + \bar{Q}(k_x, k_y, s) \cdot \underbrace{\mathcal{F} \left(\underbrace{f \left(-\frac{y''}{v} \right) \Big|_{x''=0}}_{=:B_2} \right) \left(\underbrace{k_x, k_y + \frac{i2\pi s}{v}}_{=: \beta_2} \right) + 1}_{=: \bar{f}_{B_2, \beta_2}(k_x, k_y, s)} \\
& = \bar{Q}(k_x, k_y, s) \cdot \bar{f}_{A_1, \alpha_1}(k_x, k_y, s) \\
& + \bar{Q}(k_x, k_y, s) \cdot \bar{f}_{A_2, \alpha_2}(k_x, k_y, s) \\
& + \bar{Q}(k_x, k_y, s) \cdot \bar{f}_{B_1, \beta_1}(k_x, k_y, s) \\
& + \bar{Q}(k_x, k_y, s) \cdot \bar{f}_{B_2, \beta_2}(k_x, k_y, s) + 1.
\end{aligned} \tag{18}$$

Um einen Ausdruck für $\bar{Q}(k_x, k_y, s)$ zu erhalten, der in Gleichung (8) eingesetzt werden

kann, wird vorstehende Formel nach $\bar{Q}(k_x, k_y, s)$ umgestellt:

$$\begin{aligned}
\bar{Q}(k_x, k_y, s) &= \bar{Q}(k_x, k_y, s) \cdot \bar{f}_{A_1, \alpha_1}(k_x, k_y, s) \\
&\quad + \bar{Q}(k_x, k_y, s) \cdot \bar{f}_{A_2, \alpha_2}(k_x, k_y, s) \\
&\quad + \bar{Q}(k_x, k_y, s) \cdot \bar{f}_{B_1, \beta_1}(k_x, k_y, s) \\
&\quad + \bar{Q}(k_x, k_y, s) \cdot \bar{f}_{B_2, \beta_2}(k_x, k_y, s) + 1 \\
&= \bar{Q}(k_x, k_y, s) \cdot (\bar{f}_{A_1, \alpha_1}(k_x, k_y, s) + \bar{f}_{A_2, \alpha_2}(k_x, k_y, s) \\
&\quad + \bar{f}_{B_1, \beta_1}(k_x, k_y, s) + \bar{f}_{B_2, \beta_2}(k_x, k_y, s)) + 1 \\
&\Leftrightarrow 1 = \bar{Q}(k_x, k_y, s) \cdot [1 - (\bar{f}_{A_1, \alpha_1}(k_x, k_y, s) + \bar{f}_{A_2, \alpha_2}(k_x, k_y, s) \\
&\quad + \bar{f}_{B_1, \beta_1}(k_x, k_y, s) + \bar{f}_{B_2, \beta_2}(k_x, k_y, s))] \\
&\Leftrightarrow \bar{Q}(k_x, k_y, s) = \frac{1}{1 - (\bar{f}_{A_1, \alpha_1} + \bar{f}_{A_2, \alpha_2} + \bar{f}_{B_1, \beta_1} + \bar{f}_{B_2, \beta_2})}.
\end{aligned} \tag{19}$$

Die auftretenden Fourier-Transformationen entsprechen

$$\bar{f}_{A_i, \alpha_i}(k_x, k_y, s) = \int_{-\infty}^{\infty} d\tilde{y}' \mathcal{F} \left(\frac{\mu \cdot e^{\mp 4\pi^2 \cdot s \frac{x'}{v}}}{(1 \pm \frac{x'}{v})^{\mu+1}} \right) (k_x), \tag{20}$$

für $i \in \{1, 2\}$, und

$$\bar{f}_{B_i, \beta_i}(k_x, k_y, s) = \int_{-\infty}^{\infty} d\tilde{x}' \mathcal{F} \left(\frac{\mu \cdot e^{\mp 4\pi^2 \cdot s \frac{y'}{v}}}{(1 \pm \frac{y'}{v})^{\mu+1}} \right) (k_y), \tag{21}$$

für $i \in \{1, 2\}$.

(Eine ausführlichere Berechnung findet sich im Anhang unter Punkt B)

Schließlich ergibt sich für $\bar{P}(k_x, k_y, s)$ durch Einsetzen von $\bar{Q}(k_x, k_y, s)$ aus Gleichung (19) in (8), sowie mit $\bar{G}(k_x, k_y, s)$

$$\bar{P}(k_x, k_y, s) = \frac{1}{1 - (\bar{f}_{A_1, \alpha_1} + \bar{f}_{A_2, \alpha_2} + \bar{f}_{B_1, \beta_1} + \bar{f}_{B_2, \beta_2})} \cdot \bar{G}(k_x, k_y, s), \tag{22}$$

mit den oben angeführten Fourier-Transformationen für die \bar{f}_{C_i, γ_i} , wobei

$C_i \in \{A_1, A_2, B_1, B_2\}$ und $\gamma_i \in \{\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2\}$.

Wird auch noch $\bar{G}(k_x, k_y, s)$ eingesetzt folgt

$$\bar{P}(k_x, k_y, s) = \frac{\mathcal{F} \left(\frac{1}{2\pi s} \right) - \mathcal{F} \left(\frac{1}{2} \cdot \int dx' e^{-2\pi s \frac{x'}{v}} \cdot f \left(\frac{x'}{v} \right) \right) - \mathcal{F} \left(\frac{1}{2} \cdot \int dy' e^{-2\pi s \frac{y'}{v}} \cdot f \left(\frac{y'}{v} \right) \right)}{1 - (\bar{f}_{A_1, \alpha_1} + \bar{f}_{A_2, \alpha_2} + \bar{f}_{B_1, \beta_1} + \bar{f}_{B_2, \beta_2})}. \tag{23}$$

Insgesamt konnte die Fourier-Laplace-Transformation der Wahrscheinlichkeitsverteilungsfunktion, $\bar{P}(k_x, k_y, s)$ somit berechnet werden zu:

$$\bar{P}(k_x, k_y, s) = \frac{Z}{N}, \quad (24)$$

wobei

$$Z = \mathcal{F}\left(\frac{1}{2\pi s}\right) - \mathcal{F}\left(\frac{1}{2} \cdot \int dx' e^{-2\pi s \frac{x'}{v}} \cdot f\left(\frac{x'}{v}\right)\right) - \mathcal{F}\left(\frac{1}{2} \cdot \int dy' e^{-2\pi s \frac{y'}{v}} \cdot f\left(\frac{y'}{v}\right)\right) \quad (25)$$

und

$$N = 1 - \left(\mathcal{F}\left(f\left(\frac{x''}{v}\right) \Big|_{y''=0}\right) \left(k_x - \frac{i2\pi s}{v}, k_y\right) + \mathcal{F}\left(f\left(-\frac{x''}{v}\right) \Big|_{y''=0}\right) \left(k_x + \frac{i2\pi s}{v}, k_y\right) \right. \\ \left. + \mathcal{F}\left(f\left(\frac{y''}{v}\right) \Big|_{x''=0}\right) \left(k_x, k_y - \frac{i2\pi s}{v}\right) + \mathcal{F}\left(f\left(-\frac{y''}{v}\right) \Big|_{x''=0}\right) \left(k_x, k_y + \frac{i2\pi s}{v}\right) \right). \quad (26)$$

2.2 Rücktransformation

Die inverse Fourier-Laplace-Transformation von $\bar{P}(k_x, k_y, s)$ aus Gleichung (24) kann für gewöhnlich nicht berechnet werden. Sie kann aber dennoch durch Näherungen ansatzweise bestimmt werden. Hierzu wird $\bar{P}(k_x, k_y, s)$ zunächst im Limes $|k| \rightarrow 0$ ausgewertet, um dann im nächsten Schritt das Ergebnis für $s \rightarrow 0$ zu berechnen. Gerade im Velocity-Model ist die Reihenfolge der Limes-Berechnungen normalerweise entscheidend und nicht vertauschbar. Die Grenzwertberechnungen für kleine k , bzw. s von Zähler und Nenner werden dabei getrennt vorgenommen, sodass unter Verwendung der Gleichung (1) ein genäherter Ausdruck für den Zähler $\mathcal{F}\left(\frac{1}{2\pi s}\right) - \mathcal{F}\left(\frac{1}{2} \cdot \int dx' e^{-2\pi s \frac{x'}{v}} \cdot f\left(\frac{x'}{v}\right)\right) - \mathcal{F}\left(\frac{1}{2} \cdot \int dy' e^{-2\pi s \frac{y'}{v}} \cdot f\left(\frac{y'}{v}\right)\right)$ in Abhängigkeit von v und für gegebenenfalls verschiedene Intervalle der Variablen μ entsteht, wie auch für den Nenner

$$1 - \left(\mathcal{F} \left(f \left(\frac{x'}{v} \right) \Big|_{y''=0} \right) (k_x - \frac{i2\pi s}{v}, k_y) + \mathcal{F}(\dots) \right), \text{ ebenfalls in Abhängigkeit von } v \text{ und}$$

für entsprechende Intervalle von μ , sodass für die resultierenden Intervalle von μ die Wahrscheinlichkeitsverteilungsfunktion $\bar{P}(k_x, k_y, s)$ als

$$\bar{P}(k_x, k_y, s) \approx \frac{\text{Näherung des Zähler von } \bar{P}(k_x, k_y, s)}{\text{Näherung des Nenner von } \bar{P}(k_x, k_y, s)} \text{ angegeben werden kann.}$$

3 Zusammenfassung

Durch Betrachtung und unter Einschränkung von Lévy-Walks, einer Unterklasse der Random Walks, auf die Richtungen $\pm x$ und $\pm y$ - deren charakteristisches Aussehen und der Unterschied zu normalen Random bzw. Lévy-Walks in den Abbildungen (1) bis (4) in der Einleitung abgebildet ist - wurde anknüpfend an die Arbeit von Prof. Dr. Michael Schmiedeberg, Prof. Dr. Vasily Yu Zaburdaev und Prof. Dr. Holger Stark zu Momenten und Skalierungsordnungen bei Random Walks [7] dieser neue Spezialfall untersucht und es konnte eine allgemeine Formel für die Berechnung der Wahrscheinlichkeitsverteilungsfunktion $\bar{P}(k_x, k_y, s)$ im Fourier-Laplace-Raum hergeleitet werden, wie auch eine kurze Diskussion über die näherungsweise Bestimmung der Rücktransformierten angegeben werden konnte.

Für jeden Schritt der Dauer $[t, t + dt]$ wurde seine Wahrscheinlichkeit dabei mit dem Potenzgesetz $f(t) = \frac{\mu}{(1+t)^{\mu+1}}$ beschrieben, das das Ergebnis der Wahrscheinlichkeitsverteilungsfunktion maßgeblich beeinflusst.

4 Anhang

A

Die ausführliche Berechnung der Wahrscheinlichkeitsverteilungsfunktion $P(x, y, t)$ zu Gleichung (7) erfolgt folgendermaßen:

$$\begin{aligned}
P(x, y, t) &= \iint_{|x'|, |y'| \leq vt} dx' dy' \int_0^t dt' Q(x - x', y - y', t - t') \cdot G(x', y', t') \\
&= \iint_{|x'|, |y'| \leq vt} dx' dy' \int_0^t dt' Q(x - x', y - y', t - t') \\
&\quad \cdot \left(1 - \iint d\tilde{x} d\tilde{y} \frac{1}{4} \left(\delta\left(t' - \frac{\tilde{x}}{v}\right) \delta(\tilde{y}) + \delta\left(t' + \frac{\tilde{x}}{v}\right) \delta(\tilde{y}) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \delta(\tilde{x}) \delta\left(t' - \frac{\tilde{y}}{v}\right) + \delta(\tilde{x}) \delta\left(t' - \frac{\tilde{y}}{v}\right) \right) f(t') \right) \\
&= \iint_{|x'|, |y'| \leq vt} dx' dy' \int_0^t dt' Q(x - x', y - y', t - t') \\
&\quad - \iint_{|x'|, |y'| \leq vt} dx' dy' \iint d\tilde{x} d\tilde{y} \int dt' Q(x - x', y - y', t - t') \\
&\quad \cdot \frac{1}{4} \left(\delta\left(t' - \frac{\tilde{x}}{v}\right) \delta(\tilde{y}) + \delta\left(t' + \frac{\tilde{x}}{v}\right) \delta(\tilde{y}) \right. \\
&\quad \left. + \delta(\tilde{x}) \delta\left(t' - \frac{\tilde{y}}{v}\right) + \delta(\tilde{x}) \delta\left(t' - \frac{\tilde{y}}{v}\right) \right) f(t') \tag{27} \\
&= \iint_{|x'|, |y'| \leq vt} dx' dy' \int_0^t dt' Q(x - x', y - y', t - t') \\
&\quad - \iint_{|x'|, |y'| \leq vt} dx' dy' \iint d\tilde{x} d\tilde{y} \\
&\quad \frac{1}{4} \cdot \left(Q\left(x - x', y - y', t - \frac{\tilde{x}}{v}\right) \cdot \delta(\tilde{y}) \cdot f\left(\frac{\tilde{x}}{v}\right) \right. \\
&\quad + Q\left(x - x', y - y', t + \frac{\tilde{x}}{v}\right) \cdot \delta(\tilde{y}) \cdot f\left(-\frac{\tilde{x}}{v}\right) \\
&\quad + Q\left(x - x', y - y', t - \frac{\tilde{y}}{v}\right) \cdot \delta(\tilde{x}) \cdot f\left(\frac{\tilde{y}}{v}\right) \\
&\quad \left. + Q\left(x - x', y - y', t + \frac{\tilde{y}}{v}\right) \cdot \delta(\tilde{x}) \cdot f\left(-\frac{\tilde{y}}{v}\right) \right)
\end{aligned}$$

B

Die ausführliche Berechnung der vier auftretenden Fouriertransformationen $\bar{f}_{C_i, \gamma_i}(k_x, k_y, s)$, mit $C_i \in \{A_1, A_2, B_1, B_2\}$ und $\gamma_i \in \{\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2\}$, in den Gleichungen (18) bis (21) verläuft wie folgt:

$$\begin{aligned}
\bar{f}_{A_1, \alpha_1}(k_x, k_y, s) &= \mathcal{F} \left(\underbrace{f \left(\frac{x''}{v} \right) \Big|_{y''=0}}_{=: A_1} \right) \left(\underbrace{\left(k_x - \frac{i2\pi s}{v}, k_y \right)}_{=: \alpha_1} \right) \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} d\tilde{x}' d\tilde{y}' f \left(\frac{\tilde{x}'}{v} \right) e^{-i2\pi\tilde{x}' \cdot \left(k_x - \frac{i2\pi s}{v} \right)} \cdot e^{-i2\pi\tilde{y}' \cdot k_y} \Big|_{\tilde{y}'=0} \quad (28) \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} d\tilde{y}' \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} d\tilde{x}' \frac{\mu \cdot e^{-4\pi^2 s \frac{\tilde{x}'}{v}}}{\left(1 + \frac{\tilde{x}'}{v}\right)^{\mu+1}} \cdot e^{-i2\pi\tilde{x}' \cdot k_x} \cdot e^{-i2\pi \cdot 0 \cdot k_y}}_{\text{Fourier-Trafo}} \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} d\tilde{y}' \mathcal{F} \left(\frac{\mu \cdot e^{-4\pi^2 s \frac{\tilde{x}'}{v}}}{\left(1 + \frac{\tilde{x}'}{v}\right)^{\mu+1}} \right) (k_x) \cdot 1,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\bar{f}_{A_2, \alpha_2}(k_x, k_y, s) &= \mathcal{F} \left(\underbrace{f \left(-\frac{x''}{v} \right) \Big|_{y''=0}}_{=: A_2} \right) \left(\underbrace{\left(k_x + \frac{i2\pi s}{v}, k_y \right)}_{=: \alpha_2} \right) \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} d\tilde{x}' d\tilde{y}' f \left(-\frac{\tilde{x}'}{v} \right) e^{-i2\pi\tilde{x}' \cdot \left(k_x + \frac{i2\pi s}{v} \right)} \cdot e^{-i2\pi\tilde{y}' \cdot k_y} \Big|_{\tilde{y}'=0} \quad (29) \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} d\tilde{y}' \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} d\tilde{x}' \frac{\mu \cdot e^{4\pi^2 s \frac{\tilde{x}'}{v}}}{\left(1 - \frac{\tilde{x}'}{v}\right)^{\mu+1}} \cdot e^{-i2\pi\tilde{x}' \cdot k_x} \cdot e^{-i2\pi \cdot 0 \cdot k_y}}_{\text{Fourier-Trafo}} \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} d\tilde{y}' \mathcal{F} \left(\frac{\mu \cdot e^{4\pi^2 s \frac{\tilde{x}'}{v}}}{\left(1 - \frac{\tilde{x}'}{v}\right)^{\mu+1}} \right) (k_x) \cdot 1,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\bar{f}_{B_1, \beta_1}(k_x, k_y, s) &= \mathcal{F} \left(\underbrace{f \left(\frac{y''}{v} \right) \Big|_{x''=0}}_{=:B_1} \right) \left(\underbrace{k_x, k_y - \frac{i2\pi s}{v}}_{=: \beta_1} \right) \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} d\tilde{x}' d\tilde{y}' f \left(\frac{\tilde{y}'}{v} \right) e^{-i2\pi\tilde{x}' \cdot k_x} \cdot e^{-i2\pi\tilde{y}' \cdot (k_y - \frac{i2\pi s}{v})} \Big|_{\tilde{x}'=0} \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} d\tilde{x}' \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} d\tilde{y}' \frac{\mu \cdot e^{-4\pi^2 s \frac{\tilde{y}'}{v}}}{(1 + \frac{\tilde{y}'}{v})^{\mu+1}} \cdot e^{-i2\pi\tilde{y}' \cdot k_y} \cdot e^{-i2\pi \cdot \underbrace{0}_{=: \beta_1} \cdot k_x}}_{\text{Fourier-Trafo}} \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} d\tilde{x}' \mathcal{F} \left(\frac{\mu \cdot e^{-4\pi^2 s \frac{\tilde{y}'}{v}}}{(1 + \frac{\tilde{y}'}{v})^{\mu+1}} \right) (k_y) \cdot 1
\end{aligned} \tag{30}$$

und

$$\begin{aligned}
\bar{f}_{B_2, \beta_2}(k_x, k_y, s) &= \mathcal{F} \left(\underbrace{f \left(-\frac{y''}{v} \right) \Big|_{x''=0}}_{=:B_2} \right) \left(\underbrace{k_x, k_y + \frac{i2\pi s}{v}}_{=: \beta_2} \right) \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} d\tilde{x}' d\tilde{y}' f \left(-\frac{\tilde{y}'}{v} \right) e^{-i2\pi\tilde{x}' \cdot k_x} \cdot e^{-i2\pi\tilde{y}' \cdot (k_y + \frac{i2\pi s}{v})} \Big|_{\tilde{x}'=0} \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} d\tilde{x}' \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} d\tilde{y}' \frac{\mu \cdot e^{+4\pi^2 s \frac{\tilde{y}'}{v}}}{(1 - \frac{\tilde{y}'}{v})^{\mu+1}} \cdot e^{-i2\pi\tilde{y}' \cdot k_y} \cdot e^{-i2\pi \cdot \underbrace{0}_{=: \beta_2} \cdot k_x}}_{\text{Fourier-Trafo}} \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} d\tilde{x}' \mathcal{F} \left(\frac{\mu \cdot e^{+4\pi^2 s \frac{\tilde{y}'}{v}}}{(1 - \frac{\tilde{y}'}{v})^{\mu+1}} \right) (k_y) \cdot 1.
\end{aligned} \tag{31}$$

Beweise

- (Fourier-Rück-Transformation

$$\begin{aligned}
 f(x, y) &= \mathcal{F}^{-1}(\mathcal{F}(f(x, y))) \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{F}(f)(k_x, k_y) \cdot e^{i2\pi(k_x x + k_y y)} dk_x dk_y \\
 &= \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x', y') e^{-i2\pi(k_x x' + k_y y')} dx' dy'}_{\swarrow \searrow} \underbrace{e^{i2\pi(k_x x + k_y y)} dk_x dk_y}_{\swarrow \searrow} \\
 &\quad ; \text{Vertauschen der Integrale} \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x', y') e^{i2\pi k_x(x-x')} \cdot e^{i2\pi k_y(y-y')} dk_x dk_y}_{\swarrow \searrow} dx' dy' \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x', y') \delta(x - x') \cdot e^{i2\pi k_y(y-y')} dk_y dx' dy' \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x', y') \delta(x - x') \delta(y - y') dx' dy' \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y') \delta(y - y') dy' \\
 &= f(x, y)
 \end{aligned}$$

)

- Integration im k-Raum entspricht Auswertung bei 0 im Real-Raum

$$\begin{aligned}
 f(x, y) &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{F}(f)(k_x, k_y) e^{i2\pi(k_x x + k_y y)} dk_x dk_y \\
 f(0, y) &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{F}(f)(k_x, k_y) e^{i2\pi(k_x \cdot 0 + k_y \cdot y)} dk_x dk_y \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{F}(f)(k_x, k_y) e^{i2\pi k_y y} dk_x dk_y \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{F}(f)(k_x, k_y) dk_x}_{\text{Integration im k-Raum über } k_x} e^{i2\pi k_y y} dk_y
 \end{aligned} \tag{32}$$

- Auswertung bei 0 im k-Raum entspricht Integration im Real-Raum

Verwende:

$$\mathcal{F}\left(\int_{-\infty}^t f(\tau) d\tau\right) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) h(t-\tau) d\tau$$

$$; h(x) = \begin{cases} 0 & ; x < 0 \\ 1 & ; x \geq 0 \end{cases} \quad : \text{Heaviside-Funktion}$$

$$= f(t) * h(t) \quad : \text{Faltung von } f \text{ und } h$$

mit der Faltungsregel:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(f(t) * g(t)) &= \mathcal{F}(f)(s) \cdot \mathcal{F}(g)(s) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i2\pi st} dx \cdot \int_{-\infty}^{\infty} g(t) e^{-i2\pi st} \\ \Rightarrow \mathcal{F}\left(\int_{-\infty}^x f(x') dx'\right) &= \mathcal{F}(f(x) * h(x)) \\ &= \mathcal{F}(f(x)) \cdot \mathcal{F}(h(x)) \\ &= \mathcal{F}(f)(k) \cdot \left(\frac{1}{ik} + \pi\delta(k)\right) \\ &= \frac{1}{ik} \mathcal{F}(f)(k) + \pi \cdot \underbrace{\mathcal{F}(f)(0)}_{\text{Auswertung bei 0}} \cdot \delta(k) \end{aligned} \tag{33}$$

Literatur

- [1] Jean-Philippe Bouchaud, Antoine Georges: “Anomalous diffusion in disordered media: statistical mechanisms, models and physical applications”, *Physics reports*, 195.4 (1990), 127–293, <https://www.sciencedirect.com/science/article/abs/pii/S037015739090099N?via%3Dihub>.
- [2] Wen Chen: “A speculative study of 2/3-order fractional Laplacian modeling of turbulence: Some thoughts and conjectures”, *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science*, 16.2 (2006), 023126, <http://aip.scitation.org/doi/10.1063/1.2208452>.
- [3] A. A Greenenko, A. V Chechkin, N. F Shul’ga: “Anomalous diffusion and Lévy flights in channeling”, *Physics Letters A*, 324.1 (2004), 82–85, <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0375960104002798>.
- [4] Kang Kang, Elsayed Abdelfatah, Maysam Pournik: “Nanoparticles transport in heterogeneous porous media using continuous time random walk approach”, *Journal of Petroleum Science and Engineering*, 177 (2019), 544–557, <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0920410519302128>.
- [5] Mark M. Meerschaert, Charles Tadjeran: “Finite difference approximations for fractional advection-dispersion flow equations”, *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 172.1 (2004), 65–77, <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0377042704000986>.
- [6] Gabriele Oliva u. a.: “Gossip algorithm for multi-agent systems via random walk”, *Systems & Control Letters*, 128 (2019), 34–40, <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0167691119300647>.
- [7] Michael Schmiedeberg, Vasily Yu Zaburdaev, Holger Stark: “On moments and scaling regimes in anomalous random walks”, *Journal of Statistical Mechanics: Theory and Experiment*, 2009.12 (2009), P12020, <http://stacks.iop.org/1742-5468/2009/i=12/a=P12020?key=crossref.23f8c3bb142eab13a49cdf35d28a5889>.
- [8] B. M. Schulz, M. Schulz: “Numerical investigations of anomalous diffusion effects in glasses”, *Journal of Non-Crystalline Solids*, Proceedings of the 5th International Discussion Meeting on Relaxations in Complex Systems 352.42 (2006), 4884–4887, <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0022309306009306>.

Eigenständigkeitserklärung

Hiermit bestätige ich, dass ich die vorliegende Arbeit selbständig verfasst und keine anderen Publikationen, Vorlagen und Hilfsmittel als die angegebenen benutzt habe. Alle Teile meiner Arbeit, die dem Wortlaut oder dem Sinn nach anderen Werken entnommen sind, wurden unter Angabe der Quelle kenntlich gemacht. Gleiches gilt für die von mir verwendeten Internetquellen. Die Arbeit ist weder von mir noch von einem/einer Kommilitonen/-in bereits zu einem anderen Zeitpunkt eingereicht worden.
