

Lineare Unterräume von Quadriken in endlichen projektiven Geometrien

Zulassungsarbeit aus der Physik

vorgelegt von: **Jakob Ferdinand Jorda**
am 22. Juli 2019

Lehrstuhl für Theoretische Physik I
Friedrich-Alexander-Universität Erlangen-Nürnberg



Betreuer: Prof. Dr. Klaus Mecke, Alexander Laska M.Sc. M.A.

Abstract

Es wird eine Methode entwickelt, mit der sich Geraden in Quadriken finden lassen. Diese benutzt den Schnitt des Tangentialraumes eines Punktes mit der Quadrik. Davon ausgehend, werden Geraden in \mathcal{H}_3 parallel zu einer Koordinatenachse x_2 in einen Zylinder transformiert. Dafür wird die Parametrisierung von zweidimensionalen orthogonalen Transformationen angesetzt, die Determinante allerdings nicht auf ± 1 beschränkt. Diese Transformationen hängen in einer Ebene durch $x_2 = z$ senkrecht zu x_2 nur von z ab. Die Inversen dieser Transformationen definieren eine Parametrisierung der Geraden in \mathcal{H}_3 .

Das Vorgehen wird auf \mathcal{P}_4 übertragen. Hier gibt es jedoch die zusätzliche Schwierigkeit, dass keine vollständige und explizite Parametrisierung der Lorentz-Transformationen in drei Dimensionen bekannt ist und so alle Matrizen getestet werden mussten. Hierbei fällt auf, dass diese Transformationen nicht in allen Ebenen existieren.

Im letzten Teil wird untersucht, inwieweit sich Äquivalenzrelationen auf Quadriken \mathcal{Q}_n definieren lassen, deren Äquivalenzklassen die Geraden in \mathcal{Q}_n sind. Für \mathcal{H}_3 und $p = 7$ ist dies gelungen. Außerdem wird diskutiert, welche Probleme sich bei der Verallgemeinerung auf beliebige Dimensionen ergeben.

A methode to find lines in quadrics is developed. It uses the intersection between the tangent hyperplane and the quadric. With the help of this methode lines in \mathcal{H}_3 are transformed parallel to one of the coordinate axis x_2 with a parametrisation of twodimensional orthogonal transformations. The determiant of those transformations is therefore not restricted to ± 1 . In the plane $x_2 = z$ those transformations only depend on z . With the inverse of those transformations a parametrisation of the lines in \mathcal{H}_3 is given.

The procedure is transfered to \mathcal{P}_4 . Here one finds further difficulties as no complete and explizit parametrisation of threedimensional Lorentz transformations are known. Therefore all possible matrices have to be tested. Surprisingly in some planes no transformations are found.

Finally it is investigated if equivalence relations on quadrics \mathcal{Q}_n with lines in \mathcal{Q}_n as equivalence classes can be defined. This is done for \mathcal{H}_3 and $p = 7$. Also problems for a generalisation to arbitrary dimensions are discussed.

Inhaltsverzeichnis

1	Lineare Unterräume in Quadriken	5
1.1	Anzahl	5
1.2	Finden von Unterräumen in Quadriken	6
2	Die Quadrik \mathcal{H}_3	8
2.1	Darstellung der Unterräume von \mathcal{H}_3	8
2.2	Parametrisierung der Unterräume von \mathcal{H}_3	13
3	Unterräume von \mathcal{P}_4	14
4	Zerlegung von Quadriken mit Dimension $n \geq 3$	16
4.1	Beweis Lemma 1.4	17
4.2	Zerlegung von \mathcal{H}_3	17
4.3	Verallgemeinerung für $n > 3$	21
4.4	Fehlgeschlagener Versuch	22
5	Zusammenfassung und Ausblick	23
6	Anhang	24
6.1	Geraden in \mathcal{H}_3	24
6.2	Unterräume von \mathcal{P}_4	26
7	Literaturverzeichnis	28

1 Lineare Unterräume in Quadriken

Raum und Zeit mit Quanteneigenschaften zu beschreiben ist eine der großen Herausforderungen, um die Physik auf der Planck-Skala zu verstehen. Ein Ansatz hierfür sind endliche, projektive Geometrien mit Biquadriken als fundamentale Objekte [1]. Insbesondere sind hier lineare Unterräume in Quadriken relevant. Die Anzahl der Geraden ist dabei schon für beliebige Quadriken bekannt, die explizite Form der Geraden jedoch nicht. In Quadriken in endlichen projektiven Geometrien mit Dimensionen $n > 3$ liegen dabei immer Geraden. Die elliptische Quadrik \mathcal{E}_3 hat damit eine ausgezeichnete Stellung. Durch Äquivalenzklassenbildung lässt sich also vielleicht zu begründen, warum wir in einer zeitartigen und drei raumartigen Dimensionen leben.

1.1 Anzahl

Die Anzahl $N(m; n, w)$ der Unterräume Π_m der Dimension m einer Quadrik \mathcal{Q}_n mit Charakter w in n Dimensionen über dem endlichen Körper \mathbb{F}_q mit q Elementen ist durch

$$N(\Pi_m, \mathcal{E}_{2s-1}) = N(m; 2s-1, 0) = \frac{[s-m, s]_+ [s-1-m, s-1]_-}{[1, m+1]_-} \quad (1)$$

$$N(\Pi_m, \mathcal{H}_{2s-1}) = N(m; 2s-1, 2) = \frac{[s-1-m, s-1]_+ [s-m, s]_-}{[1, m+1]_-} \quad (2)$$

$$N(\Pi_m, \mathcal{P}_{2s}) = N(m; 2s, 1) = \frac{[s-m, s]_+ [s-m, s]_-}{[1, m+1]_-} \quad (3)$$

gegeben[2]. Dabei ist

$$[r, s]_+ = \begin{cases} (q^r + 1)(q^{r+1} + 1) \cdot \dots \cdot (q^s + 1) & \text{für } s \geq r, \\ 1 & \text{für } s < r \end{cases}$$

$$[r, s]_- = \begin{cases} (q^r - 1)(q^{r+1} - 1) \cdot \dots \cdot (q^s - 1) & \text{für } s \geq r, \\ 1 & \text{für } s < r \end{cases}.$$

Für kleine Dimensionen ist dies explizit in Tabelle 1 zu sehen. Es fällt auf, dass die Anzahl der Geraden pro Punkt der Quadrik \mathcal{Q}_n für Dimensionen $n \geq 2$ immer gleich der Anzahl der Punkte der Quadrik \mathcal{Q}_{n-2} desselben Charakters ist. Die Tabelle gilt auch für $q = p^n$ für eine beliebige Primzahl p und eine beliebige Potenz $n \in \mathbb{N}$. Im folgenden werden jedoch nur endliche Körper \mathbb{F}_p mit Primzahlordnung betrachtet, weshalb nun einfach p zur Charakterisierung des Körpers verwendet wird. Die Primzahl p ist o.B.d.A. im folgenden immer $p = 3 \pmod{4}$, sodass -1 eine Nicht-Quadratzahl ist.

Quadrik	Punkte	Geraden	Geraden pro Punkt
\mathcal{P}_0	0	0	n.d.
\mathcal{H}_1	2	0	0
\mathcal{E}_1	0	0	n.d.
\mathcal{P}_2	$q + 1$	0	0
\mathcal{H}_3	$(q + 1)^2$	$2(q + 1)$	2
\mathcal{E}_3	$q^2 + 1$	0	0
\mathcal{P}_4	$(q^2 + 1)(q + 1)$	$(q^2 + 1)(q + 1)$	$q + 1$
\mathcal{H}_5	$\frac{(q^2+1)(q^3-1)}{q-1}$	$\frac{(q^2+1)(q+1)(q^3-1)(q^2-1)}{(q^2-1)(q-1)}$	$(q + 1)^2$
\mathcal{E}_5	$\frac{(q^3+1)(q^2-1)}{q-1}$	$\frac{(q^3+1)(q^2+1)(q^2-1)(q-1)}{(q^2-1)(q-1)}$	$q^2 + 1$
\mathcal{P}_6	$\frac{(q^3+1)(q^3-1)}{q-1}$	$\frac{(q^3+1)(q^2+1)(q^3-1)(q^2-1)}{(q^2-1)(q-1)}$	$(q + 1)(q^2 + 1)$
\mathcal{H}_7	$\frac{(q^3+1)(q^4-1)}{q-1}$	$\frac{(q^3+1)(q^2+1)(q^4-1)(q^3-1)}{(q^2-1)(q-1)}$	$\frac{(q^2+1)(q^3-1)}{q-1}$
\mathcal{E}_7	$\frac{(q^4+1)(q^3-1)}{q-1}$	$\frac{(q^4+1)(q^3+1)(q^3-1)(q^2-1)}{(q^2-1)(q-1)}$	$(q + 1)(q^3 + 1)$
\mathcal{P}_8	$\frac{(q^4+1)(q^4-1)}{q-1}$	$\frac{(q^4+1)(q^3+1)(q^4-1)(q^3-1)}{(q^2-1)(q-1)}$	$\frac{(q^3+1)(q^3-1)}{q-1}$
\mathcal{H}_9	$\frac{(q^4+1)(q^5+1)}{q-1}$	$\frac{(q^4+1)(q^3+1)(q^5-1)(q^4-1)}{(q^2-1)(q-1)}$	$\frac{(q^3+1)(q^4-1)}{q-1}$

Tabelle 1: Anzahl der Geraden in Quadriken geringer Dimension. \mathcal{P}_n ist eine parabolische Quadrik im n -dimensionalen projektiven Raum, \mathcal{E}_n ist eine elliptische Quadrik im n -dimensionalen projektiven Raum und \mathcal{H}_n ist eine hyperbolische Quadrik im n -dimensionalen projektiven Raum. Die Anzahl der Geraden pro Punkt ist die Anzahl der durch die Geraden definierten Punkte durch die Anzahl der Punkte in \mathcal{Q}_n .

1.2 Finden von Unterräumen in Quadriken

Im Folgenden bezeichnen Kleinbuchstaben mit Dach $\hat{a} = \langle a_0, \dots, a_n \rangle^t \in P(n, p)$ die homogenen, auf die letzte von Null verschiedene Komponente normierten Koordinaten des projektiven Raums und Großbuchstaben $A = (a_0, \dots, a_n)^t \in V(n + 1, p)$ die Punkte im $n + 1$ -dimensionalen Vektorraum über dem Körper \mathbb{F}_p . Weiter wird mit

$$\mathfrak{P} : V(n + 1, p) \rightarrow P(n, p), A \mapsto \hat{a}$$

die Abbildung bezeichnet, die einen Punkt im Vektorraum seiner Äquivalenzklasse im projektiven Raum zuordnet.

Im Folgenden werden Geraden in Quadriken als einfachste, nicht-triviale Unterräume untersucht. Intuitiv liegt eine Gerade l durch die Punkte $\hat{a}, \hat{b} \in \mathcal{Q}_n$ in der Quadrik $\mathcal{Q}_n = \{\hat{p} | F(P) = 0\}$ mit einer quadratischen Form $F(x_0, \dots, x_n)$, wenn $F(A + t(B - A)) = 0$ für alle $t \in \mathbb{F}_q$. Je nach Zusammenhang bietet es sich auch an, Quadriken über Matrizen zu beschreiben. In diesem Fall gilt $\mathcal{Q}_n = \{\hat{p} | P^t \hat{Q} P = 0\}$ mit einer nicht singulären, symmetrisierten Matrix \hat{Q} . Dabei gilt

$$(x_0, \dots, x_n)^t \hat{Q} (x_0, \dots, x_n) = F(x_0, \dots, x_n). \quad (4)$$

Lemma 1.1: Die Punkte, die durch $\hat{p} = \mathfrak{P}(A+tB)$, $t \in \mathbb{F}_p$ und $\hat{p}' = \mathfrak{P}(A+t(B-A))$, $t \in \mathbb{F}_p$ beschrieben werden, liegen auf derselben Geraden l .

Beweis: Es gilt:

$$\begin{aligned} U &= \{A + t(B - A) \mid t \in \mathbb{F}_p\} \subset \text{Span}\{A, B\} \\ V &= \{A + tB \mid t \in \mathbb{F}_p\} \subset \text{Span}\{A, B\} \end{aligned}$$

Außerdem wird eine Ebene in $V(n+1, p)$ auf eine Gerade in $P(n, p)$ abgebildet. \square

Die Mengen U und V aus dem Beweis von Lemma 1.1 enthalten jeweils nur p Elemente. In U fehlt der Punkt $B - A$, dessen Äquivalenzklasse jedoch auch in l liegt und der in V enthalten ist, und in V fehlt der Punkt B , dessen Äquivalenzklasse jedoch auch in l liegt und der in U enthalten ist.

Lemma 1.2: Seien $\hat{a}, \hat{b} \in \mathcal{Q}_n$ Quadrikkpunkte. Die Gerade $l = \hat{a}\hat{b}$ liegt genau dann in \mathcal{Q}_n , wenn $A^t \hat{Q} B = 0$.

Beweis: In der diagonalisierten Form gilt

$$\hat{Q} = \begin{cases} \mathbf{I}_{n+1} \\ \mathbf{I}_{n+1}^{ns} \end{cases}$$

in Abhängigkeit von der Dimension und dem Charakter der Quadrik [3]. Dabei ist \mathbf{I}_{n+1} die Identität in n projektiven Dimensionen und

$$\mathbf{I}_{n+1}^{ns} = \begin{pmatrix} \mathbf{I}_n & \vec{0} \\ \vec{0}^t & \bar{q} \end{pmatrix}$$

und \bar{q} eine beliebige Nicht-Quadratzahl. Also gilt

$$l^t \hat{Q} l = A^t \hat{Q} A + B^t \hat{Q} B + 2tA^t \hat{Q} B. \quad (5)$$

\square

Dieses intuitive Konzept wird in [2] verallgemeinert, indem auch Punkte $\hat{b} \notin \mathcal{Q}_n$ zugelassen werden. Dafür wird die Funktion $G_A(X) = F(A+X) - F(A) - F(X)$ eingeführt. Mit Gleichung (4) gilt also $G_A(X) = A^t \hat{Q} X$, falls $\hat{x} \in \mathcal{Q}_n$. Mit der Menge

$$T_A := \{\hat{b} \mid G_A(B) = 0\} \quad (6)$$

wird für $\hat{a} \in \mathcal{Q}_n$ die Tangentenhyperebene zu \mathcal{Q}_n in \hat{a} bezeichnet. Eine Tangente ist dabei eine Gerade, die \mathcal{Q}_n in genau einem Punkt schneidet.

Satz 1.3: T_A enthält die Punkte der Tangenten zu \mathcal{Q}_n in \hat{a} und der Geraden in \mathcal{Q}_n durch \hat{a} .

Beweis: Siehe [2], Theorem 1.11 □

Wenn man also die Geraden, die komplett in einer Quadrik \mathcal{Q}_n liegen, finden will, muss man den Schnitt aus Tangentialraum und Quadrik betrachten.

Lemma 1.4: Für $n \geq 2$ gilt $T_P \cap \mathcal{Q}_n = P\mathcal{Q}_{n-2}$.

Beweis: Siehe [2], Lemma 1.22, bzw. Abschnitt 4.1 □

Mit Lemma 1.4 ist die Anzahl der Geraden durch einen Quadrikkpunkt \hat{a} , die komplett in der Quadrik \mathcal{Q}_n liegen, also durch die Anzahl der Punkte in \mathcal{Q}_{n-2} gegeben. Dies deckt sich mit der Einsicht aus Tabelle 1.

2 Die Quadrik \mathcal{H}_3

Nach Gleichung (2) gibt es in \mathcal{H}_3 Geraden, aber keine Ebenen.

2.1 Darstellung der Unterräume von \mathcal{H}_3

Mit dem Verfahren aus Abschnitt 1.2 können nun alle Geraden durch einen Punkt \hat{a} bestimmt werden. Man betrachte hierfür die folgende Menge $S_{\hat{a}}$. Mit H^∞ werden dabei die Punkte im unendlichen bezeichnet.

Definition 2.1: $S_{\hat{a}} = \{\hat{b} \in H^\infty \mid B^t \hat{Q} A = 0\}$

Nach Konstruktion ist durch jeden Punkt $\hat{s} \in S_{\hat{a}}$ genau eine Gerade $l_{\hat{s}} \in \mathcal{Q}_n$ gegeben. Also gilt mit Lemma 1.4 $|S_{\hat{a}}| = |\mathcal{Q}_{n-2}|$.

Für den Fall $\mathcal{Q}_n = \mathcal{H}_3$ gilt also $|S_{\hat{a}}| = 2$. Durch jeden Punkt gehen also zwei Geraden. Sei $S_{\hat{a}} = \{\hat{s}_1, \hat{s}_2\}$. Dann sind mit Lemma 1.1 die zwei Geraden durch \hat{a} durch $l_1 = \{\hat{a} + t\hat{s}_1 \mid t \in \mathbb{F}_p\}$ und $l_2 = \{\hat{a} + t\hat{s}_2 \mid t \in \mathbb{F}_p\}$ gegeben. Da \hat{s}_1 und \hat{s}_2 Punkte im Unendlichen sind, enthalten die Mengen l_1 und l_2 alle affinen Punkte der Geraden und werden im folgenden auch als Geraden bezeichnet.

Zur Veranschaulichung der Geraden wird eine der zwei Geraden ausgewählt und parallel zur x_2 -Achse ausgerichtet. Hierfür wurden Transformationen der Form

$$T(x_2) = \begin{pmatrix} a & -b & 0 & 0 \\ b & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (7)$$

mit $a = a(x_2) \in \mathbb{F}_p$ und $b = b(x_2) \in \mathbb{F}_q$ angesetzt. Hierbei wird, in Analogie zu Drehstreckungen, explizit auf die Forderung $\det(T(x_2)) = 1$ verzichtet. Da nur der linke obere Block unbekannt ist, genügt es, die x_0 - und die x_1 -Komponente der Vektoren und die Matrix

$$G_{ab} = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \quad (8)$$

zu betrachten. Um die Symmetrie in x_2 -Richtung auszunutzen, wird zunächst der Punkt \hat{a}_0 gewählt, der auf der Geraden l_1 und in der x_0x_1 -Ebene liegt. Dies ist nach dem folgenden Lemma möglich.

Lemma 2.2: *Eine Gerade l , die in der Quadrik \mathcal{H}_3 in Diagonalform liegt, liegt nicht in einer Ebene senkrecht zu den Koordinatenachsen.*

Beweis: Wähle o.B.d.A. die Ebene $x_2 = z$. Zwei Punkte mit den geforderten Eigenschaften haben dann die Koordinaten $\hat{a} = \langle a_0, a_1, z, 1 \rangle^t$ und $\hat{b} = \langle b_0, b_1, z, 1 \rangle^t$. Nach Voraussetzung gilt weiter $A^t \hat{Q} A = 0$, $B^t \hat{Q} B = 0$ und $A^t \hat{Q} B = 0$ mit $\hat{Q} = \mathbf{I}_4$.

$$\Rightarrow a_0 = \sqrt{-1 - a_1^2 - z^2}, \quad b_0 = \sqrt{-1 - b_1^2 - z^2}$$

Eingesetzt in $A^t \hat{Q} B = 0$, folgt $(1 + z^2)(a_1^2 + b_1^2 - 2a_1b_1) = (1 + z^2)(a_1 - b_1)^2 = 0$. Aus $a_1 = b_1$ folgt dann mit $A^t \hat{Q} A = 0$ und $B^t \hat{Q} B = 0$ auch $a_0 = b_0$. \square

Sei $\hat{a}_z = \langle x_z, y_z, z, 1 \rangle^t$ der affine Punkt, der auf der Geraden mit dem entsprechenden z -Wert liegt. Im Folgenden wird für alle $z \in \mathbb{F}_p$ das Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} a & -b & 0 & 0 \\ b & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_z \\ y_z \\ z \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z \\ 1 \end{pmatrix} \quad (9)$$

gelöst. Dies ist äquivalent zu $a = (x_z \cdot x_0 + y_z \cdot y_0)/(x_z^2 + y_z^2)$ und $b = (y_z \cdot x_0 - x_z \cdot y_0)/(x_z^2 + y_z^2)$. a kann mit $A_z^t \hat{Q} A_z = 0$ und $A_0^t \hat{Q} A_z = 0$ umgeformt werden zu $a = 1/(1 + z^2)$. Eine vergleichbare algebraische Vereinfachung wurde für b nicht gefunden. Aus den Berechnungen zeigt sich aber, dass $b = z \cdot a = z/(1 + z^2)$ sein muss. Also gilt:

$$T(z) = \begin{pmatrix} \frac{1}{1+z^2} & \frac{-z}{1+z^2} & 0 & 0 \\ \frac{z}{1+z^2} & \frac{1}{1+z^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (10)$$

Die aufgerichteten Geraden sind in Abbildung 1 zu sehen.

Aus Betrachtung der zugehörigen quadratischen Form für affine Punkte $F(X) = x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + 1$ lässt sich auf die quadratische Form in den jeweiligen Ebenen $x_2 = z$ schließen. Durch Normierung erhält man

$$F_z(X) = \frac{x_0^2}{1 + z^2} + \frac{x_1^2}{1 + z^2} + 1. \quad (11)$$

Also werden die x_0 - und x_1 -Komponenten für ein beliebiges z im Vergleich zur Ebene $x_2 = 0$ um den Faktor $\frac{1}{\sqrt{1+z^2}}$ skaliert. Man beachte, dass dieser Faktor im Allgemeinen

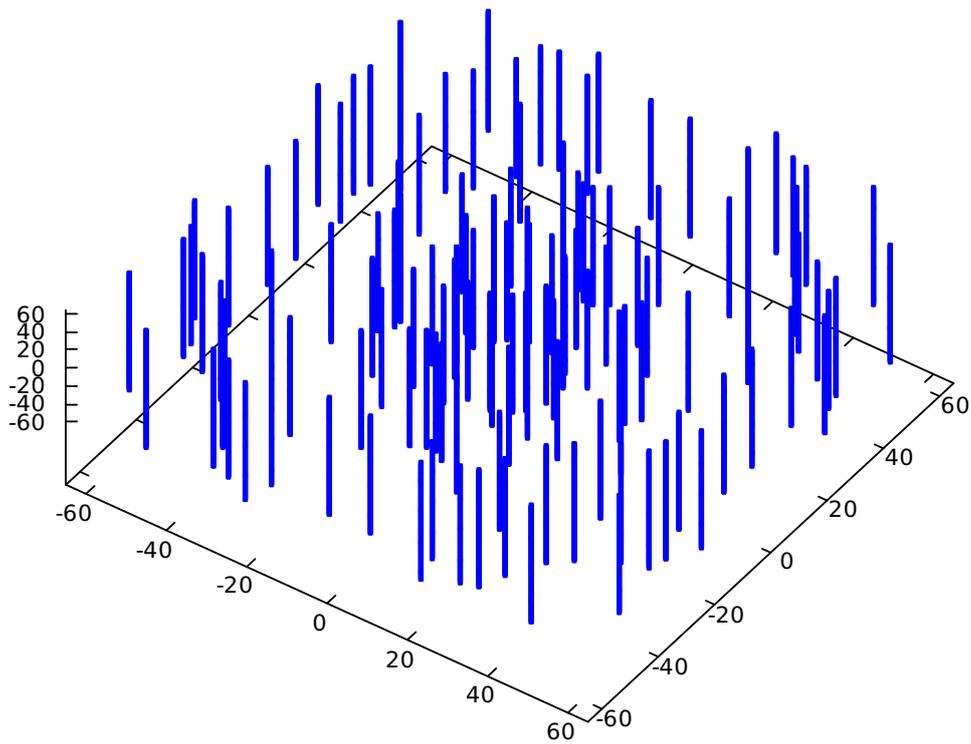
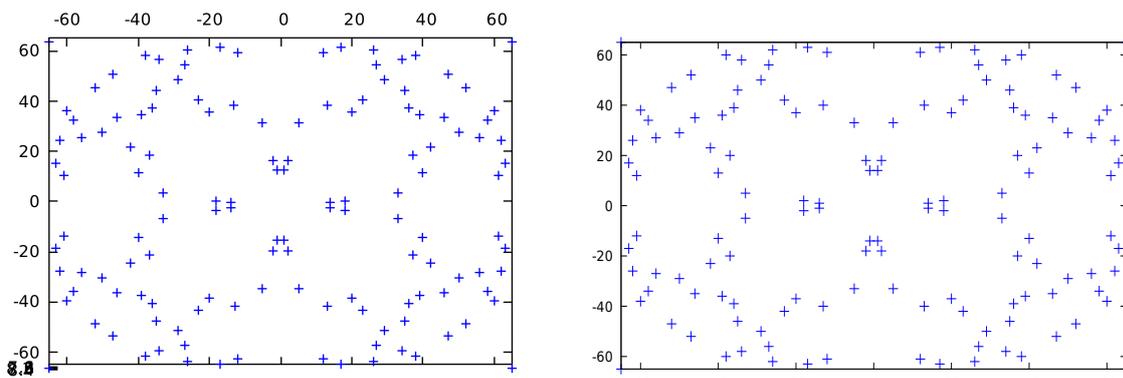
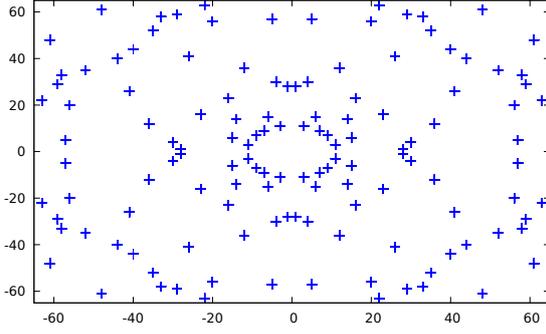


Abbildung 1: Alle durch $T(z)$ aus Gleichung (10) in x_2 -Richtung aufgerichteten Geraden in \mathcal{H}_3 . Die x_2 -Richtung zeigt dabei nach oben.

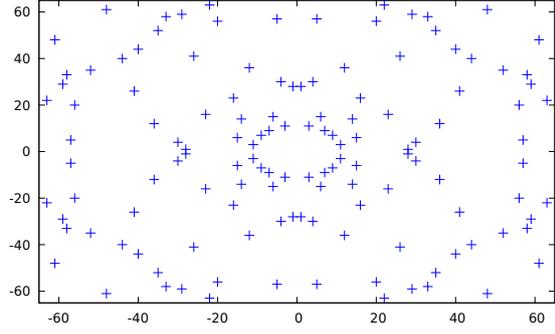


(a) Punkte in der Ebene $x_2 = 8$ der Quadrik \mathcal{H}_3 (b) Nullstellenmenge der quadratische Form $x_0^2/(1+8^2) + x_1^2/(1+8^2) + 1$

Abbildung 2: Die Punkte in der Ebene $x_2 = 8$ der Quadrik \mathcal{H}_3 (a) entsprechen genau der Nullstellenmenge der quadratischen Form $x_0^2/(1+8^2) + x_1^2/(1+8^2) + 1$ (b).



(a) Aufgerichtete Geraden von \mathcal{H}_3 in Projektion auf die x_0x_1 -Ebene



(b) Punkte der Quadrik \mathcal{P}_2

Abbildung 3: Die auf die x_0x_1 -Ebene projizierten aufgerichteten Geraden in \mathcal{H}_3 (a) entsprechen genau den Punkten von \mathcal{P}_2 (b).

nicht existiert, da die Wurzel nicht immer definiert ist. Dieser Zusammenhang ist für $p = 131$ und die Ebene $x_2 = 8$ von \mathcal{H}_3 in Abbildung 2 zu sehen.

Wird der obere Block G_{ab} durch den Streckungsfaktor geteilt, erhält man die Transformation

$$\bar{T}(z) = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{1+z^2}} & \frac{-z}{\sqrt{1+z^2}} & 0 & 0 \\ \frac{z}{\sqrt{1+z^2}} & \frac{1}{\sqrt{1+z^2}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (12)$$

die, wie sich leicht überprüfen lässt, orthogonal ist. Auch diese Transformation existiert im Allgemeinen aus dem genannten Grund nicht immer.

Die Lösungen x der Wurzel $\sqrt{1+z^2} = x$ entsprechen den affinen Punkten der Quadrik \mathcal{P}_2 mit der zugehörigen quadratischen Form $F(x, z) = -x^2 + z^2 + 1$. Dies sind $p - 1$ verschiedene Punkte. Wenn $\langle x, z, 1 \rangle^t \in \mathcal{P}_2$, ist auch $\langle -x, z, 1 \rangle^t \in \mathcal{P}_2$. Die Wurzeln existieren also für $\frac{p-1}{2}$ verschiedene z -Werte.

Abbildung 3 zeigt außerdem, dass die Geraden projiziert auf die x_0x_1 -Ebene genau den Punkten von \mathcal{P}_2 entsprechen.

Wie in Abbildung 4 zu sehen ist, wird die zweite Gerade l_2 durch die Transformation $T(z)$ nicht parallel zur x_2 -Achse aufgerichtet. Werden jedoch die eben beschriebenen Schritte für die Gerade l_2 ausgeführt, erhält man als Transformation, die l_2 parallel zur z -Achse aufrichtet, die Transponierte von $T(z)$, also

$$T^t(z) = \begin{pmatrix} \frac{1}{1+z^2} & \frac{z}{1+z^2} & 0 & 0 \\ \frac{-z}{1+z^2} & \frac{1}{1+z^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (13)$$

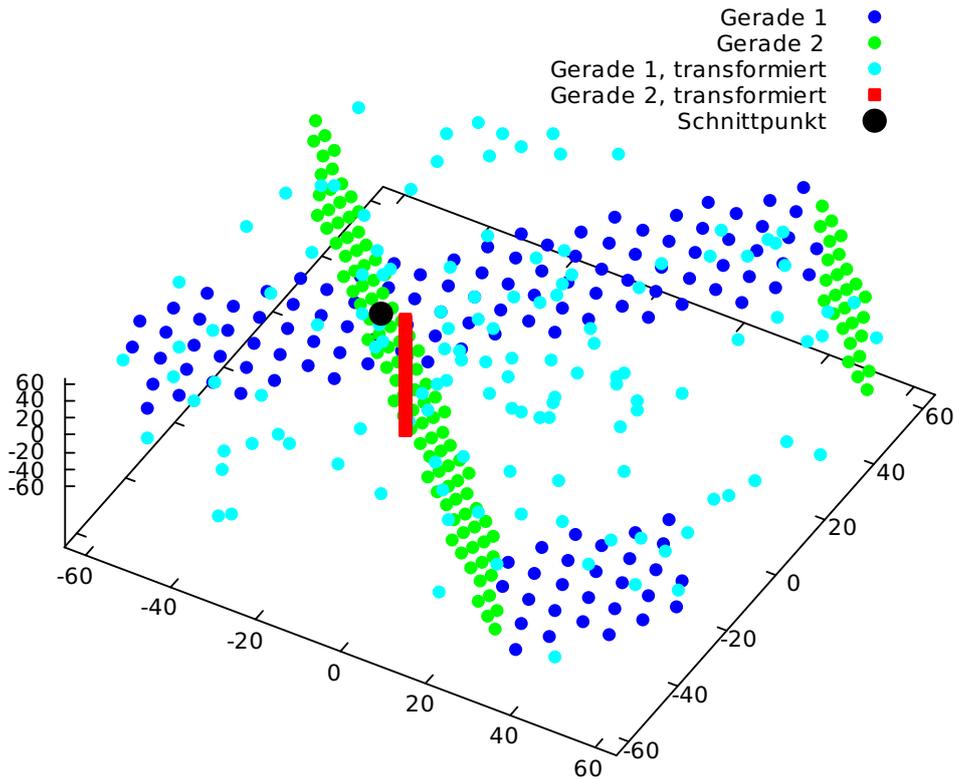


Abbildung 4: In \mathcal{H}_3 gibt es zwei Geraden durch einen Punkt, die in grün bzw. blau dargestellt sind. Der Schnittpunkt ist in schwarz hervorgehoben. Die durch $T(z)$ aus Gleichung (10) transformierten Punkte der blauen Gerade sind in cyan zu sehen. Sie liegen nicht mehr auf einer Gerade. Die grüne Gerade wird durch $T(z)$ auf die rote Gerade abgebildet. Die verwendete Primzahl ist $p = 131$.

Foldes schlägt in finiten Geometrien die trigonometrischen Funktionen als $\sin(x) = \frac{2}{x+x^{-1}}$ und $\cos(x) = \frac{x-x^{-1}}{x+x^{-1}}$ vor [4]. Mit

$$G_{ab} = \begin{pmatrix} \cos(x) & -\sin(x) \\ \sin(x) & \cos(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{1+z^2} & \frac{-z}{1+z^2} \\ \frac{z}{1+z^2} & \frac{1}{1+z^2} \end{pmatrix} \quad (14)$$

kann somit $z(x) = \frac{2}{x-x^{-1}}$ für $x \notin \{0,1\}$ bestimmt werden. Die Winkel ändern sich demnach nur im Vorzeichen, wenn die Gerade l_1 statt der Gerade l_2 aufgerichtet wird. Für $p = 19$ zeigt Tabelle 2 die Winkel.

Gerade l_1		Gerade l_2	
z	x	z	x
2	-5	2	5
2	4	2	-4
4	6	4	-6
4	3	4	-3
5	9	5	-9
5	2	5	-2
9	-7	9	7
9	-8	9	8
-2	5	-2	-5
-2	-4	-2	4
-4	-6	-4	6
-4	-3	-4	3
-5	-9	-5	9
-5	-2	-5	2
-9	7	-9	-7
-9	8	-9	-8

Tabelle 2: Winkel aus $\sin(x) = \frac{2}{x+x^{-1}}$ und $\cos(x) = \frac{x-x^{-1}}{x+x^{-1}}$ und Gleichung (14) für $p = 19$.

2.2 Parametrisierung der Unterräume von \mathcal{H}_3

Neben einer übersichtlicheren grafischen Darstellung der Quadrikkpunkte und Geraden durch die Transformation mit $T(z)$ (Gl.10), lassen sich die nicht transformierten Geraden in \mathcal{H}_3 mit dem Wissen aus dem vorherigen Abschnitt auch parametrisieren. Hierfür ist die Inverse der Transformation $T(z)$

$$T^{-1}(z) = \begin{pmatrix} 1 & z & 0 & 0 \\ -z & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (15)$$

hilfreich.

Satz 2.3: Sei $\hat{p} = \langle p_0, p_1, 0, 1 \rangle^t \in \mathcal{H}_3$ beliebig. Die affinen Punkte der zwei Geraden durch \hat{p} , die in \mathcal{H}_3 liegen, sind dann durch

$$l_1 = \{ \langle p_0 + zp_1, p_1 - zp_0, z, 1 \rangle^t \mid z \in \mathbb{F}_p \} \quad (16)$$

$$l_2 = \{ \langle p_0 - zp_1, p_1 + zp_0, z, 1 \rangle^t \mid z \in \mathbb{F}_p \} \quad (17)$$

gegeben.

Beweis: Die affinen Punkte der aufgerichteten Gerade durch \hat{p} sind durch $g = \{ \langle p_0, p_1, z, 1 \rangle^t \mid z \in \mathbb{F}_p \}$ gegeben. $T^{-1}(z)$ angewendet auf g liefert dann l_1 und $(T^t)^{-1}(z) = (T^{-1})^t(z)$ angewendet auf g liefert l_2 . \square

Für Satz 2.3 gibt es noch einen zweiten Beweis. Hierfür wird zunächst gezeigt, dass jeder Punkt in l_1 bzw. l_2 ein Quadrikkpunkt ist. Als nächstes folgt aus $A^t \hat{Q} B = 0$ für beliebige $\hat{a}, \hat{b} \in l_1$ bzw. $\hat{a}, \hat{b} \in l_2$ und Lemma 1.2 die Aussage.

3 Unterräume von \mathcal{P}_4

Nach Gleichung (3) gibt es in \mathcal{P}_4 Geraden, aber keine Ebenen. Analog zu $|\mathcal{H}_3| = (p+1)^2 = (p+1) \cdot |\mathcal{P}_2|$ gilt auch $|\mathcal{P}_4| = (p+1)(p^2+1) = (p+1) \cdot |\mathcal{E}_3|$. Tabelle 1 bzw. die Gleichungen (1), (2) und (3) zeigen jedoch, dass im Allgemeinen für eine Quadrik \mathcal{Q}_n nicht $\mathcal{Q}_n = (p+1) \cdot \mathcal{Q}_{n-1}$ gilt. Dies legt nahe, dass \mathcal{P}_4 , analog zur Zerlegung von \mathcal{H}_3 in $(p+1)$ verschiedene \mathcal{P}_2 , disjunkt in $(p+1)$ verschiedene Quadriken des Typs \mathcal{E}_3 zerlegt werden kann. Hierfür ist es sicherlich ratsam,

$$\hat{Q} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (18)$$

bzw. für affine Punkte

$$F(X) = -x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 1 \quad (19)$$

anzunehmen. Durch das zusätzliche Minuszeichen sind die Koordinatenachsen nicht mehr alle äquivalent, sodass Schnitte senkrecht zu verschiedenen Koordinatenachsen zu unterschiedlichen Ergebnissen führen.

Nun kann auch hier versucht werden, eine Gerade $l \in \mathcal{P}_4$ parallel zu einer Koordinatenachse auszurichten. Durch das zusätzliche Minuszeichen liegt es in Analogie zu dem Fall \mathcal{H}_3 nahe, eine Lorentz-Transformation mit beliebigem Streckungsfaktor anzunehmen. Eine vollständige und explizite Parametrisierung von Lorentz-Transformationen in drei Dimensionen ist uns jedoch nicht bekannt. Für kleine Primzahlen lassen sich jedoch alle Matrizen ausprobieren. Die Geraden durch den Punkt \hat{a} bekommt man dabei wieder aus der Menge $S_{\hat{a}}$. Durch die geänderte quadratische Form gilt jetzt jedoch $|S_{\hat{a}}| = p+1$. Sollen nun die affinen Punkte von l parallel zur x_3 -Achse ausgerichtet werden, bietet es sich wieder an, die Symmetrie in x_3 -Richtung auszunutzen, indem zunächst $\hat{a}_0 = \langle a_{0,0}, a_{0,1}, a_{0,2}, 0, 1 \rangle^t$ als der Punkt in l bestimmt wird, bei dem die x_3 -Komponente Null ist. Dies ist möglich, da innerhalb einer Ebene der Form \mathcal{E}_3 keine Geraden liegen. Von einer Transformation T wird in diesem Fall gefordert, dass ein Punkt $\hat{a}_{x_3} = \langle a_{x_3,0}, a_{x_3,1}, a_{x_3,2}, x_3, 1 \rangle^t$ auf den Punkt $\hat{a}'_{x_3} = \langle a_{0,0}, a_{0,1}, a_{0,2}, x_3, 1 \rangle^t$ abgebildet wird. Sei

$$M = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Dann wird weiterhin

$$-(T^t MT)_{11} = (T^t MT)_{22} = (T^t MT)_{33} \quad (20)$$

$$(T^t MT)_{44} = (T^t MT)_{55} = 1 \quad (21)$$

$$(T^t MT)_{ij} = 0 \text{ sonst} \quad (22)$$

gefordert. Dies ergibt in der Ebene $x_3 = 0$ für $p = 3$ neben der Identität noch sieben weitere verschiedene Lorentz-Transformationen. In der Ebene $x_3 = 1$ sowie in der Ebene $x_3 = -1$ wird jedoch keine Transformation gefunden, die die geforderten Kriterien erfüllt.

Für $p = 7$ ergibt sich ein ähnliches Bild, wobei zusätzlich in den Ebenen $x_3 = \pm 2$ jeweils 16 Transformationen existieren, die die geforderten Kriterien erfüllen. In den Ebenen $x_3 = \pm 1$ und $x_3 = \pm 3$ werden jedoch keine entsprechenden Transformationen gefunden. Die Matrix $T^t MT$ lautet in den beiden Fällen $x_3 = \pm 2$

$$T(\pm 2)^t MT(\pm 2) = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (23)$$

Für $p = 11$ werden in den Ebenen $x_3 = 0, \pm 3, \pm 5$ jeweils 24 Transformationen gefunden, die die Forderungen aus den Gleichungen (20), (21) und (22) erfüllen. In den Ebenen $x_3 = \pm 3$ ist $T^t MT$ in beiden Fällen

$$T(\pm 3)^t MT(\pm 3) = \begin{pmatrix} -4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (24)$$

und in den Ebenen $x_3 = \pm 5$

$$T(\pm 5)^t MT(\pm 5) = \begin{pmatrix} -5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (25)$$

Abschnitt 6.2 im Anhang enthält die gefundenen Transformationen.

Wird nun $x_3 = z$ als konstanter Parameter aufgefasst und die quadratische Form in Gleichung (19) neu normiert, ergibt sich die quadratische Form

$$F_z(X) = -\frac{x_0^2}{1+z^2} + \frac{x_1^2}{1+z^2} + \frac{x_2^2}{1+z^2} + 1. \quad (26)$$

Auch hier beträgt der Streckungsfaktor $\frac{1}{1+z^2}$ pro Richtung. Dies legt die Vermutung nahe, dass die Transformationen in den anderen Ebenen nicht existieren, da die Wurzeln nicht

definiert sind. In \mathbb{F}_7 ist 2 jedoch ein Quadratzahl, sodass die Transformationen in den Ebenen $x_3 = \pm 1$ existieren sollten. Dahingegen ist $-2 \equiv 1 + 2^2 \pmod{7}$ keine Quadratzahl in \mathbb{F}_7 . Außerdem sollte auf den oberen drei Diagonalelementen von T^tMT das Inverse des Quadrates des Streckungsfaktors stehen. Das Inverse von -2 ist jedoch 3 und nicht 2 wie in Gleichung (23).

Für größere Primzahlen steigt die benötigte Rechenzeit leider so stark an, dass es nicht gelang, weitere Primzahlen zu untersuchen. Insgesamt ist also noch nicht klar, wie sich die Resultate von \mathcal{H}_3 auf \mathcal{P}_4 übertragen lassen. Zur weiteren Untersuchung wäre auf jeden Fall eine vollständige und explizite Parametrisierung der Lorentz-Transformationen sinnvoll. Damit wären vielleicht Rückschlüsse auf die Struktur der gesuchten Transformationen möglich. Außerdem sollten sich so größere Primzahlen untersuchen lassen. In einem weiteren Schritt könnten auch die Forderungen aus den Gleichungen (20), (21) und (22) gelockert werden. Insgesamt stellt sich dann auch die Frage, inwieweit es sinnvoll ist, \mathcal{P}_4 in \mathcal{E}_3 statt in \mathcal{H}_3 zu zerlegen. Vor diesem Hintergrund sollte dann auch geklärt werden, was

$$|\mathcal{Q}_n| < (p+1) \cdot |\mathcal{Q}_{n-1}| \quad (27)$$

bedeutet. Gleichung (27) könnte bedeuten, dass \mathcal{Q}_n in diesem Fall nicht disjunkt zerlegt werden kann. Insgesamt sollten ja für alle Schnitte senkrecht zu den Koordinatenachsen $(n-1)$ -dimensionale Quadriken gefunden werden und zusätzlich noch eine weitere im Unendlichen.

4 Zerlegung von Quadriken mit Dimension $n \geq 3$

Die einzigen nicht-leeren Quadriken, die keine Geraden enthalten sind, \mathcal{H}_1 , \mathcal{P}_2 und \mathcal{E}_3 (siehe Tabelle 1). Es stellt sich also die Frage, ob eine Äquivalenzrelation auf \mathcal{Q}_n definiert werden kann, die allen Punkten \hat{p} einer Geraden $l \in \mathcal{Q}_n$ eine Äquivalenzklasse zuordnet. Weiterhin stellt sich die Frage, ob man durch Iteration \mathcal{H}_1 , \mathcal{P}_2 oder \mathcal{E}_3 erhält. Hierfür muss zunächst ein System L aus Geraden $l \in \mathcal{Q}_n$ gefunden werden, für das gilt

$$\mathcal{Q}_n = \bigcup_{l \in L} l \quad (28)$$

$$l_1 \cap l_2 = \emptyset \text{ für beliebige } l_1, l_2 \in L \text{ und } l_1 \neq l_2. \quad (29)$$

Lemma 4.1: *Wenn L ein System aus Geraden ist, das die Bedingungen aus den Gleichungen (28), (29) erfüllt, ist durch $\hat{a} \sim \hat{b} \Leftrightarrow \hat{a}, \hat{b} \in l \in L$ eine Äquivalenzrelation auf \mathcal{Q}_n gegeben. Wenn die Äquivalenzklassen einer Äquivalenzrelation auf \mathcal{Q}_n Geraden in \mathcal{Q}_n sein sollen, muss die Äquivalenzrelation die Bedingungen aus den Gleichungen (28), (29) erfüllen.*

Beweis: Die Reflexivität und Symmetrie sind klar.

Sei $\hat{a} \sim \hat{b}$ und $\hat{a} \sim \hat{p}$. Dann haben die Geraden $\hat{a}\hat{b}$ und $\hat{a}\hat{p}$ einen gemeinsamen Punkt, also muss $\hat{a}\hat{b} = \hat{a}\hat{p}$ gelten, was $\hat{b} \sim \hat{p}$ impliziert.

Umgekehrt erfüllt eine beliebige Äquivalenzrelation R auf \mathcal{Q}_n durch die Reflexivität auch Gleichung (28).

Wäre Gleichung (29) nicht erfüllt, gäbe es jedoch mindestens ein Geradenpaar $l_1, l_2 \in L$, sodass $l_1 \cap l_2 \neq \emptyset$. Durch die Transitivität würde die Äquivalenzklasse eines beliebigen Punktes in einer der Geraden also aus beiden Geraden bestehen. \square

Es bleibt also noch zu klären, ob ein solches System L existiert und wie es gefunden werden kann. Hierfür müssen die Geraden durch einen Punkt unterschieden werden. Alle Geraden durch einen Punkt \hat{p} sind dabei nach Lemma 1.4 durch $P\mathcal{Q}_{n-2}$ gegeben. Eine Unterscheidung der Geraden könnte also aufgrund der quadratischen Formen $F_{\mathcal{Q}_{n-2}, \hat{p}}$ bzw. der zugrunde liegenden Matrix $M_{\mathcal{Q}_{n-2}, \hat{p}}$ von \mathcal{Q}_{n-2} erfolgen. Im Folgenden wird diese Matrix in Diagonalform mit $\hat{D}_{\mathcal{Q}_{n-2}, \hat{p}}$ und in kanonischer Form mit $\hat{K}_{\mathcal{Q}_{n-2}, \hat{p}}$ bezeichnet. Die Quadrikpunkte der Diagonalform werden mit $\mathcal{Q}_n(D)$ und die der kanonischen Form mit $\mathcal{Q}_n(K)$ bezeichnet. Genauso werden Punkte $\hat{p} \in \mathcal{Q}_n(M)$ mit $\hat{p}(M)$ für $M \in \{D, K\}$ bezeichnet, wo es wichtig und ansonsten nicht eindeutig ist.

4.1 Beweis Lemma 1.4

Sei $U_i = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$, $i = 0, \dots, n$ der Vektor mit einer Eins an der $i + 1$ -ten Stelle und nur Nullen sonst und u_i die entsprechende Hyperebene.

Sei $P = U_n, U_{n-1} \in \mathcal{Q}_n$ und $U_0, U_1, \dots, U_{n-2} \in T_P$, sodass $T_P = u_{n-1}$ und die quadratische Form von \mathcal{Q}_n gleich

$$F(X) = f(x_0, \dots, x_{n-1}) + x_{n-1}x_n \quad (30)$$

ist, wobei f keinen Term in x_{n-1}^2 enthalten soll. Diese Bedingungen sind in der kanonischen Form erfüllt.

Sei $f = \sum_{i \leq j} q_{i,j} x_i x_j$. Gleichung (30) wird für den weiteren Beweis zunächst mit $y_i = x_i$ für $i = 0, 1, \dots, n-1$ und $y_n = q_{0,n-1}x_0 + q_{1,n-1}x_1 + \dots + q_{n-2,n-1}x_{n-2} + x_n$ in

$$F(Y) = f(y_0, \dots, y_{n-2}, 0) + y_{n-1}y_n$$

umgeformt, was immer noch durch die kanonische Form erfüllt ist. $F_{\mathcal{Q}_{n-2}, \hat{p}}$ ist dann

$$F_{\mathcal{Q}_{n-2}, \hat{p}} = f(y_0, \dots, y_{n-2}, 0) \quad (31)$$

und

$$\mathcal{Q}_{n-2}(K) = \{\hat{a} \mid f(a_0, \dots, a_{n-2}, 0) = 0, a_{n-1} = a_n = 0\}. \quad (32)$$

4.2 Zerlegung von \mathcal{H}_3

Für \mathcal{H}_3 und $p = 7$ ist die Matrix $\hat{K}_{\mathcal{H}_3, \hat{p}}$ mit der eben erläuterten Wahl von \hat{p} beispielsweise durch

$$\hat{K}_{\mathcal{H}_3, \hat{p}} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (33)$$

p	-3	-2	-1	0	1	2	3
$1/p$	2	3	-1	$/$	1	-3	-2
p^2	2	-3	1	0	1	-3	2

Tabelle 3: Elemente von \mathbb{F}_7 mit ihren Inversen und Quadraten

gegeben. Die Indizes der Matrizen \hat{D} und \hat{K} beziehen sich im folgenden Beispiel auf \mathcal{H}_3 , sodass sie zu $M_{3,\hat{p}}$ bzw. $M_{3-2,\hat{p}}$, $M \in \{\hat{K}, \hat{D}\}$ für die zu \mathcal{H}_3 bzw. \mathcal{H}_{3-2} gehörige Matrix vereinfacht werden. Die Transformationen, die die Diagonalform $\hat{D}_{3,\hat{p}}$ in die kanonische Form $\hat{K}_{3,\hat{p}}$ abbilden, sind

$$\hat{T}_1 = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 0 & -2 \\ -3 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & -3 & -1 \\ 0 & 2 & -3 & 1 \end{pmatrix}, \quad \hat{T}_2 = \begin{pmatrix} -3 & -3 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & -3 & -3 \\ -2 & 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \quad (34)$$

mit

$$\hat{K}_{3,\hat{p}} = \hat{T}_1 \hat{D}_{3,\hat{p}} \hat{T}_2. \quad (35)$$

Die Inversen von \hat{T}_1 und \hat{T}_2 sind

$$\hat{T}_1^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 2 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ -3 & 3 & 2 & -2 \end{pmatrix}, \quad \hat{T}_2^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & -3 \\ 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & -3 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 1 & -2 \end{pmatrix}. \quad (36)$$

\hat{T}_1 und \hat{T}_2 bestimmt man in zwei Schritten. Zuerst wird eine Matrix R gesucht, die die Vorzeichen der Diagonalelemente mit ungeradem Index umdreht. Es gilt

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & -2 \end{pmatrix} \quad (37)$$

und damit, da R symmetrisch ist,

$$N = R \hat{D}_{3,\hat{p}} R = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Im nächsten Schritt wird eine Matrix S gesucht, die N in kanonische Form transformiert. Es gilt

$$S = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \quad (38)$$

und damit, wieder da S symmetrisch ist,

$$\hat{K}_{3,\hat{p}} = SNS.$$

Weitere Details sind im Beweis von Lemma 5.2.1 in [3] zu finden. Insgesamt gilt also $\hat{T}_1 = SR$ und $\hat{T}_2 = RS$.

Sei $\hat{p} = \mathfrak{P}(\hat{T}_2 \cdot U_n) = \langle 0, 2, -3, 1 \rangle^t \in \mathcal{H}_3(D)$. Die \mathcal{H}_{3-2} zugrundeliegende Matrix $\hat{K}_{3-2,\hat{p}}$ in kanonischer Form ist nach Lemma 1.4

$$\hat{K}_{3-2,\hat{p}} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (39)$$

was durch \hat{T}_1 und \hat{T}_2 zu

$$\hat{D}_{3-2,\hat{p}} = \hat{T}_1 \hat{K}_{3-2,\hat{p}} \hat{T}_2 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \end{pmatrix} \quad (40)$$

transformiert wird. Diese Matrix hat Rang 2. Mit der zusätzlichen Bedingung aus Gleichung (32), $x_2 = x_3 = 0$, folgt

$$\mathcal{H}_{3-2,\hat{p}}(D) = \{ \hat{T}_2 \cdot U_0, \hat{T}_2 \cdot U_1 \} = \{ \langle -2, 3, 0, 1 \rangle^t, \langle 2, 3, 0, 1 \rangle^t \}. \quad (41)$$

Sei $U_i(D) = \hat{T}_2 \cdot U_i$. Die affinen Punkte der Geraden durch \hat{p} sind dann

$$l_1 = \{ \mathfrak{P}(P(D) + t(U_0(D) - P(D))) \mid t \in \mathbb{F}_p \} = \{ \langle 0, 2, -3, 1 \rangle^t + t \langle -3, -2, 1, 0 \rangle^t \} \quad (42)$$

$$l_2 = \{ \mathfrak{P}(P(D) + t(U_1(D) - P(D))) \mid t \in \mathbb{F}_p \} = \{ \langle 0, 2, -3, 1 \rangle^t + t \langle 3, -2, 1, 0 \rangle^t \}. \quad (43)$$

Sie definieren den Kegel aus Lemma 1.4. Dieser ist in Abbildung 5 zu sehen.

Sei $\hat{a} \in \mathcal{H}_3(D)$ beliebig und $O_{\hat{a}}$ eine orthogonale Transformation, sodass $\hat{a} = \mathfrak{P}(O_{\hat{a}} \cdot P)$ gilt. $\hat{D}_{3-2,\hat{a}}$ erhält man dann durch

$$\hat{D}_{3-2,\hat{a}} = O_{\hat{a}} \hat{D}_{3-2,\hat{p}} O_{\hat{a}}^t \quad (44)$$

und

$$\mathcal{H}_{3-2,\hat{a}} = \{ O_{\hat{a}} \langle 2, 3, 0, 1 \rangle^t, O_{\hat{a}} \langle -2, 3, 0, 1 \rangle^t \}. \quad (45)$$

Eine Parametrisierung der orthogonalen Transformationen in drei Dimensionen ist durch

$$\left(\begin{array}{c|c|c} \frac{\delta_5 \lambda \nu + \delta_0 \delta_2 \delta_4 \sqrt{1 - \lambda^2} \sqrt{1 - \mu^2} \sqrt{1 - \nu^2}}{\delta_1 \delta_2 \delta_4 \lambda \sqrt{1 - \mu^2} \sqrt{1 - \nu^2}} & \delta_0 \mu \sqrt{1 - \lambda^2} & \frac{-\delta_4 \delta_5 \lambda \sqrt{1 - \nu^2} + \delta_0 \delta_2 \sqrt{1 - \lambda^2} \sqrt{1 - \mu^2} \nu}{\delta_1 \delta_2 \lambda \sqrt{1 - \mu^2} \nu} \\ \hline \frac{-\delta_0 \delta_1 \delta_5 \sqrt{1 - \lambda^2} \nu + \delta_1 \delta_2 \delta_4 \lambda \sqrt{1 - \mu^2} \sqrt{1 - \nu^2}}{\delta_3 \delta_4 \mu \sqrt{1 - \nu^2}} & \delta_1 \lambda \mu & \frac{\delta_0 \delta_1 \delta_4 \delta_5 \sqrt{1 - \lambda^2} \sqrt{1 - \nu^2} + \delta_1 \delta_2 \lambda \sqrt{1 - \mu^2} \nu}{\delta_3 \mu \nu} \\ \hline & -\delta_2 \delta_3 \sqrt{1 - \mu^2} & \end{array} \right) \quad (46)$$

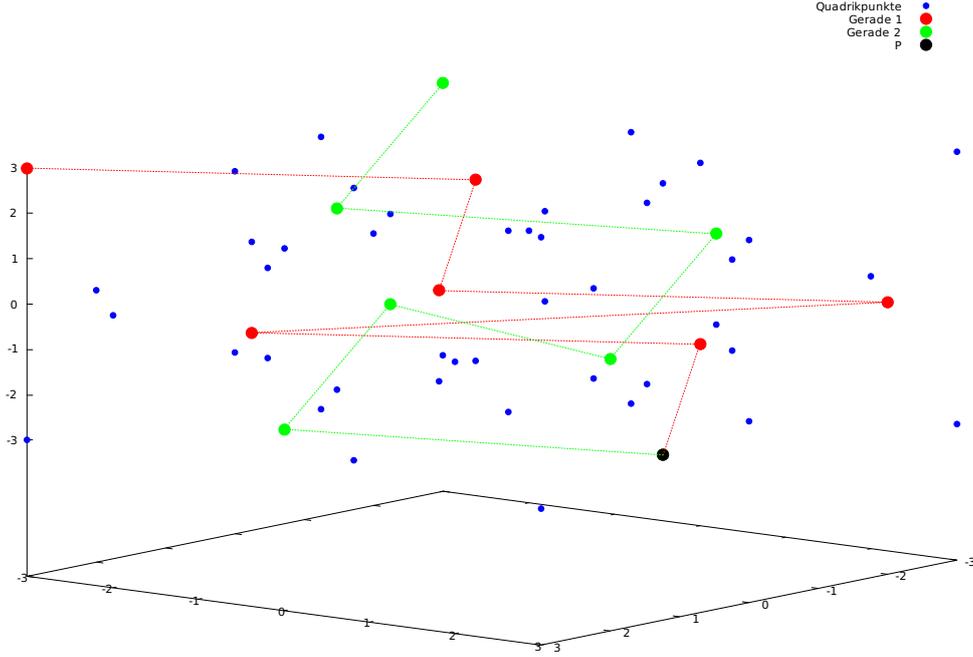


Abbildung 5: Die mit Linien verbundenen Quadrikkpunkte sind der Schnitt des Tangentialraumes T_P mit der Quadrik \mathcal{H}_3 . Nach Lemma 1.4 handelt es sich hierbei um einen Kegel $\hat{p} \mathcal{H}_{3-2,\hat{p}}(D)$ mit $\hat{p} = \langle 0, 2, -3, 1 \rangle^t$ und $\mathcal{H}_{3-2,\hat{p}}(D)$ wie in Gleichung (41). Für die Geraden ist dabei die Reihenfolge, in der die Punkte verbunden werden, beliebig. Mit der in Gleichung (42), bzw. (43) gegebenen Parametrisierung ergibt sich jedoch die gezeigte Nachbarschaft.

gegeben [5], wobei $\mu, \lambda, \nu \in \mathbb{F}_p$ und $\delta_i = \pm 1$. Nach Lemma 2.2 genügt es, die Punkte in einer Ebene zu betrachten, um alle Geraden der Quadrik \mathcal{H}_3 zu finden. Die Matrix aus Gleichung (46) vereinfacht sich also zu

$$\begin{pmatrix} a & -b & 0 \\ b & a & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

mit

$$a = \lambda, \quad b = \delta_0 \sqrt{1 - \lambda^2}, \quad \mu = \nu = 1, \quad \delta_0 = \pm 1, \quad \delta_i = 1 \text{ sonst}, \quad (47)$$

sodass

$$O_{\hat{a}} = \begin{pmatrix} a & -b & 0 & 0 \\ b & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (48)$$

angenommen werden kann. Dies ist eine Untergruppe der orthogonalen Transformationen in drei projektiven Dimensionen. Durch die $p + 1$ verschiedenen Möglichkeiten für $a, b \in \mathbb{F}_p$ aus der Bedingung in Gleichung (47) gibt es $p + 1$ dieser Transformationen und es gilt $\det(O_{\hat{a}}) = 1$. Außerdem ist $\mathfrak{P}(O_{\hat{a}} \cdot P(D)) \in \mathcal{H}_3$, da

$$O_{\hat{a}} \cdot P(D) = (p_0a - p_1b, p_0b + p_1a, p_2, 1)^t$$

$$P(D)^t O_{\hat{a}}^t D_{3,\hat{p}} O_{\hat{a}} P(D) = p_0^2 a^2 - 2p_0 p_1 ab + p_1^2 b^2 + p_0^2 b^2 + 2p_0 p_1 ab + p_1^2 a^2 + p_2^2 + 1 = 0$$

mit Gleichung (47). Insgesamt wird also jeder Punkt \hat{a} einer Ebene im Affinen von \mathcal{H}_3 durch genau eine Transformation $O_{\hat{a}}$ erreicht.

Die Bilder der Geraden l_1 (Gl. (42)) unter den Transformationen $O_{\hat{a}}$ sind im Anhang im Abschnitt 6.1 in den Tabellen 4 und 5 zu finden. Ein Vergleich zeigt, dass die durch Transformation aus l_1 hervorgehenden Geraden disjunkt sind.

Sei

$$l_{\hat{a}} = O_{\hat{a}}(l_1).$$

Ein System L auf \mathcal{H}_3 , das die Gleichungen (28) und (29) erfüllt, ist also durch

$$L = \{l_{\hat{a}} \mid \hat{a} \in \mathcal{H}_3(D), a_2 = -3\} \quad (49)$$

gegeben.

Nach Lemma 4.1 sind nun die Geraden in L die Äquivalenzklassen einer Äquivalenzrelation \sim . Es gilt also

$$\mathcal{H}_3 / \sim = \{\hat{a} \in \mathcal{H}_3 \mid a_2 = -3\} = \mathcal{P}_2. \quad (50)$$

Dabei kann je nach Parametrisierung der Geraden a_2 auch einen beliebigen anderen Wert $z \in F_7$ annehmen.

4.3 Verallgemeinerung für $n > 3$

Analog zum Vorgehen aus dem vorherigen Abschnitt können die Transformationen \hat{T}_1 und \hat{T}_2 auch für höhere Dimensionen gefunden werden. Leider hängen diese jedoch von der verwendeten Primzahl ab, da die Transformation R maßgeblich von zwei Zahlen $a, b \in \mathbb{F}_p$ mit $a^2 + b^2 = -1$ abhängt. Natürlich hängen \hat{T}_1 und \hat{T}_2 auch vom Charakter der Quadrik \mathcal{Q}_n ab.

Die Quadrik $\mathcal{Q}_{n-2,\hat{p}}(D)$ bzw. die dazugehörige Matrix $\hat{D}_{\hat{Q}_{n-2,\hat{p}}}$ können dann analog zum Fall von \mathcal{H}_3 aus den kanonischen Formen $\hat{K}_{\hat{Q}_{n,\hat{p}}}$ bzw. $\hat{K}_{\hat{Q}_{n-2,\hat{p}}}$ berechnet werden. Daraus lassen sich auch die Punkte in $\mathcal{Q}_{n-2,\hat{p}}(D)$ bestimmen und aus diesen Punkten die Geraden durch $\hat{p}(D)$. Sei $\hat{b} \in \mathcal{Q}_{n-2,\hat{p}}(D)$. Dann muss eine Teilmenge N der orthogonalen Transformationen bzw. der Lorentz-Transformationen gefunden werden, sodass mit $V = \{P + t(B - P) \mid t \in \mathbb{F}_p\}$

$$\mathfrak{P}(n_1(V)) \cap \mathfrak{P}(n_2(V)) = \emptyset \text{ für } n_1, n_2 \in N, n_1 \neq n_2 \quad (51)$$

$$\bigcup_{n \in N} \mathfrak{P}(n(V)) = \mathcal{Q}_n. \quad (52)$$

Für den Fall $\mathcal{Q}_n = \mathcal{H}_3$ genügt es hierfür, mit Lemma 2.2, zweidimensionale orthogonale Transformationen zu verwenden. In höheren Dimensionen können Geraden jedoch auch innerhalb einer Hyperebene liegen, sodass hier tatsächlich n -dimensionale Transformationen benötigt werden. Für den Fall $\mathcal{Q}_n = \mathcal{H}_3$ handelt es sich bei N weiterhin um eine Untergruppe der dreidimensionalen orthogonalen Gruppe. Zu klären ist, ob N auch in höheren Dimensionen eine Gruppenstruktur hat. Mit der Äquivalenzrelation aus Lemma 4.1 gilt dann

$$\mathcal{Q}_n / \sim = \{\mathfrak{P}(n(P)) \mid n \in N\}. \quad (53)$$

Es gibt also eine Bijektion zwischen \mathcal{Q}_n / \sim und N .

4.4 Fehlgeschlagener Versuch

Aus der Bestimmungsgleichung für den Tangentialraum T_P (Gleichung (54)) und der Bedingung, dass der Punkt P ein Quadrikkpunkt ist (Gleichung (55)), sollte sich der Schnitt aus der Quadrik (Gleichung (56)) und dem Tangentialraum auch bestimmen lassen, indem die Gleichungen

$$P \hat{Q} X = 0 \quad (54)$$

$$P \hat{Q} P = 0 \quad (55)$$

$$X \hat{Q} X = 0 \quad (56)$$

ineinander eingesetzt werden.

Für \mathcal{H}_3 und $p = 7$ führt das mit $P_{i,j} = \frac{P_j}{P_i}$ und Gleichung (54) nach x_0 umgeformt und in Gleichung (56) eingesetzt zu

$$\hat{Q}_{\mathcal{H}_3, x_0} = \begin{pmatrix} 1 + P_{0,1}^2 & P_{0,1}P_{0,2} & P_{0,1}P_{0,3} \\ P_{0,1}P_{0,2} & 1 + P_{0,2}^2 & P_{0,2}P_{0,3} \\ P_{0,1}P_{0,3} & P_{0,2}P_{0,3} & 1 + P_{0,3}^2 \end{pmatrix}. \quad (57)$$

Das charakteristische Polynom von $\hat{Q}_{\mathcal{H}_3, x_0}$ ist $-\lambda(\lambda - 1)^2$.

Für \mathcal{E}_3 ist, wenn Gleichung (54) nach x_0 umgeformt wird, das charakteristische Polynom von $\hat{Q}_{\mathcal{E}_3, x_0}$ ebenfalls $-\lambda(\lambda - 1)^2$. Wenn Gleichung (54) jedoch nach x_1 umgestellt wird, folgt

$$\hat{Q}_{\mathcal{E}_3, x_1} = \begin{pmatrix} P_{1,0} - 1 & -P_{1,0}P_{1,2} & -P_{1,0}P_{1,3} \\ -P_{1,0}P_{1,2} & P_{1,2}^2 + 1 & P_{1,2}P_{1,3} \\ -P_{1,0}P_{1,3} & P_{1,2}P_{1,3} & P_{1,3}^2 + 1 \end{pmatrix}$$

und das charakteristische Polynom von $\hat{Q}_{\mathcal{E}_3, x_1}$ ist $\lambda(\lambda - 1)(2P_{1,0}^2 - 1 - \lambda)$. In einer projektiven Dimension ist

$$\hat{Q}_{\mathcal{E}_1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \hat{Q}_{\mathcal{H}_1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Wenn man also die Eigenwerte ungleich Null mit den Diagonalelementen von $\hat{D}_{\mathcal{E}_1}$ bzw. $\hat{D}_{\mathcal{H}_1}$ identifizieren will, würde sich für \mathcal{H}_3 der Charakter der Quadrik \mathcal{Q}_{n-2} ändern, was

Lemma 1.4 widerspricht. Für \mathcal{E}_3 würde der Charakter von \mathcal{Q}_{n-2} erhalten bleiben, wenn Gleichung (54) nach x_0 umgeformt wird, oder die Gleichung nach x_1 umgeformt wird und $P_{1,0} \in \{\pm 1, \pm 3\}$. Für $P_{1,0} = \pm 2$ wäre das charakteristische Polynom $\lambda^2(1 - \lambda)$. Das generelle Vorgehen muss also falsch sein, auch wenn mir die Ursache dafür nicht klar ist.

5 Zusammenfassung und Ausblick

In Abschnitt 1.2 wird eine Methode entwickelt, mit der sich Geraden in beliebigen Quadriken \mathcal{Q}_n finden lassen. Damit wird in Abschnitt 2.1 die Transformation aus Gleichung (10) berechnet, die Geraden in \mathcal{H}_3 parallel zur x_2 -Achse ausrichtet. Mit der Inversen von $T(z)$ wird in Abschnitt 2.2 in Gleichung (17) eine Parametrisierung der Geraden in \mathcal{H}_3 gegeben.

In Abschnitt 3 wird dieses Vorgehen auf \mathcal{P}_4 übertragen, indem versucht wird die Drehstreckung in $p + 1$ verschiedenen Schnitten der Form \mathcal{E}_3 durchzuführen. Hier werden nur in bestimmten Ebenen Transformationen gefunden, die Geraden wie in \mathcal{H}_3 ausrichten. Da hier keine vollständige und explizite Parametrisierung der Lorentz-Transformationen bekannt ist, sind alle möglichen Matrizen getestet worden, was zudem mehr als eine Matrix pro Hyperebene liefert. Hier sollten Lorentz-Transformationen genauer untersucht werden. Wenn sich auch eine Parametrisierung findet, lässt sich die Form der gefundenen Matrizen verglichen. Ansonsten kann auch ein Lockern der Bedingungen aus den Gleichungen (20), (21) und (22) versucht werden. Möglicherweise lässt sich \mathcal{P}_4 auch in \mathcal{H}_3 zerlegen.

Abschließend wird in Abschnitt 4 diskutiert, inwieweit Äquivalenzrelationen auf \mathcal{Q}_n mit Geraden in \mathcal{Q}_n als Äquivalenzklassen definiert werden können. Hierfür ist nach Lemma 4.1 eine disjunkte Zerlegung in Geraden notwendig. Der Beweis von Lemma 1.4 in Abschnitt 4.1 liefert dafür entscheidende Hinweise. Beispielhaft wird dieses Vorgehen für \mathcal{H}_3 angewendet und damit die gewünschte Äquivalenzrelation definiert. Dabei geht jedoch die Parametrisierung der orthogonalen Transformationen in zwei bzw. drei Dimensionen ein.

Bei der Verallgemeinerung auf Dimensionen $n > 3$ ergeben sich jedoch einige Probleme. So sind allgemein vollständige und explizite Parametrisierungen von Lorentz-Transformationen und orthogonalen Transformationen nicht bekannt. So können immer noch für einen Punkt \hat{p} die Geraden durch \hat{p} gefunden werden, die in der Quadrik liegen. Um diese für einen beliebigen anderen Punkt \hat{a} zu finden, benötigt das gezeigte Vorgehen jedoch eine orthogonale Transformation bzw. Lorentz-Transformation T , sodass $\hat{a} = \mathfrak{P}(T \cdot P)$. Interessant wäre auch, ob es sich bei der Menge N aus den Gleichungen (51) und (52) immer um eine Untergruppe der Lorentz-Transformationen bzw. orthogonalen Transformationen handelt. Außerdem können in Dimensionen $n > 3$ Geraden innerhalb einer Hyperebene liegen, Lemma 2.2 kann also nicht verallgemeinert werden.

6 Anhang

6.1 Geraden in \mathcal{H}_3

$O_{\hat{a}}$	l_1
$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\left\{ \left\langle \begin{matrix} 0 \\ 2 \\ -3 \\ 1 \end{matrix} \right\rangle, \left\langle \begin{matrix} -3 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \end{matrix} \right\rangle, \left\langle \begin{matrix} 1 \\ -2 \\ -1 \\ 1 \end{matrix} \right\rangle, \left\langle \begin{matrix} -2 \\ 3 \\ 0 \\ 1 \end{matrix} \right\rangle, \right.$ $\left. \left\langle \begin{matrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{matrix} \right\rangle, \left\langle \begin{matrix} -1 \\ -1 \\ 2 \\ 1 \end{matrix} \right\rangle, \left\langle \begin{matrix} 3 \\ -3 \\ 3 \\ 1 \end{matrix} \right\rangle, \left\langle \begin{matrix} -3 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{matrix} \right\rangle \right\}$
$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\left\{ \left\langle \begin{matrix} 0 \\ -2 \\ -3 \\ 1 \end{matrix} \right\rangle, \left\langle \begin{matrix} 3 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \end{matrix} \right\rangle, \left\langle \begin{matrix} -1 \\ 2 \\ -1 \\ 1 \end{matrix} \right\rangle, \left\langle \begin{matrix} 2 \\ -3 \\ 0 \\ 1 \end{matrix} \right\rangle, \right.$ $\left. \left\langle \begin{matrix} -2 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{matrix} \right\rangle, \left\langle \begin{matrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{matrix} \right\rangle, \left\langle \begin{matrix} -3 \\ 3 \\ 3 \\ 1 \end{matrix} \right\rangle, \left\langle \begin{matrix} 3 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{matrix} \right\rangle \right\}$
$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\left\{ \left\langle \begin{matrix} -2 \\ 0 \\ -3 \\ 1 \end{matrix} \right\rangle, \left\langle \begin{matrix} 0 \\ -3 \\ -2 \\ 1 \end{matrix} \right\rangle, \left\langle \begin{matrix} 2 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{matrix} \right\rangle, \left\langle \begin{matrix} -3 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{matrix} \right\rangle, \right.$ $\left. \left\langle \begin{matrix} -1 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{matrix} \right\rangle, \left\langle \begin{matrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ 1 \end{matrix} \right\rangle, \left\langle \begin{matrix} 3 \\ 3 \\ 3 \\ 1 \end{matrix} \right\rangle, \left\langle \begin{matrix} 2 \\ -3 \\ 1 \\ 0 \end{matrix} \right\rangle \right\}$
$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\left\{ \left\langle \begin{matrix} 2 \\ 0 \\ -3 \\ 1 \end{matrix} \right\rangle, \left\langle \begin{matrix} 0 \\ 3 \\ -2 \\ 1 \end{matrix} \right\rangle, \left\langle \begin{matrix} -2 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{matrix} \right\rangle, \left\langle \begin{matrix} 3 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{matrix} \right\rangle, \right.$ $\left. \left\langle \begin{matrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 1 \end{matrix} \right\rangle, \left\langle \begin{matrix} -1 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{matrix} \right\rangle, \left\langle \begin{matrix} -3 \\ -3 \\ 3 \\ 1 \end{matrix} \right\rangle, \left\langle \begin{matrix} -2 \\ 3 \\ 1 \\ 0 \end{matrix} \right\rangle \right\}$

Tabelle 4: Vier der Acht Geraden, die man durch die Transformationen $O_{\hat{a}}$ aus l_1 erhält.

$O_{\hat{a}}$	l_1
$\begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\left\{ \begin{matrix} 3 \\ -3 \\ -3 \\ 1 \end{matrix} \right\}, \left\{ \begin{matrix} 1 \\ 1 \\ -2 \\ 1 \end{matrix} \right\}, \left\{ \begin{matrix} -1 \\ -2 \\ -1 \\ 1 \end{matrix} \right\}, \left\{ \begin{matrix} -3 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{matrix} \right\},$ $\left\{ \begin{matrix} 2 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{matrix} \right\}, \left\{ \begin{matrix} 0 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \end{matrix} \right\}, \left\{ \begin{matrix} -2 \\ 0 \\ 3 \\ 1 \end{matrix} \right\}, \left\{ \begin{matrix} -2 \\ -3 \\ 1 \\ 0 \end{matrix} \right\} \right\}$
$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 & 0 \\ -2 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\left\{ \begin{matrix} -3 \\ -3 \\ -3 \\ 1 \end{matrix} \right\}, \left\{ \begin{matrix} 1 \\ -1 \\ -2 \\ 1 \end{matrix} \right\}, \left\{ \begin{matrix} -2 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{matrix} \right\}, \left\{ \begin{matrix} 2 \\ 3 \\ 0 \\ 1 \end{matrix} \right\},$ $\left\{ \begin{matrix} -1 \\ -2 \\ 1 \\ 1 \end{matrix} \right\}, \left\{ \begin{matrix} 3 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{matrix} \right\}, \left\{ \begin{matrix} 0 \\ 2 \\ 3 \\ 1 \end{matrix} \right\}, \left\{ \begin{matrix} -3 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{matrix} \right\} \right\}$
$\begin{pmatrix} -2 & -2 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\left\{ \begin{matrix} 3 \\ 3 \\ -3 \\ 1 \end{matrix} \right\}, \left\{ \begin{matrix} -1 \\ 1 \\ -2 \\ 1 \end{matrix} \right\}, \left\{ \begin{matrix} 2 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{matrix} \right\}, \left\{ \begin{matrix} -2 \\ -3 \\ 0 \\ 1 \end{matrix} \right\},$ $\left\{ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{matrix} \right\}, \left\{ \begin{matrix} -3 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{matrix} \right\}, \left\{ \begin{matrix} 0 \\ -2 \\ 3 \\ 1 \end{matrix} \right\}, \left\{ \begin{matrix} 3 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{matrix} \right\} \right\}$
$\begin{pmatrix} -2 & 2 & 0 & 0 \\ -2 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\left\{ \begin{matrix} -3 \\ 3 \\ -3 \\ 1 \end{matrix} \right\}, \left\{ \begin{matrix} -1 \\ -1 \\ -2 \\ 1 \end{matrix} \right\}, \left\{ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 1 \end{matrix} \right\}, \left\{ \begin{matrix} 3 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{matrix} \right\},$ $\left\{ \begin{matrix} -2 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{matrix} \right\}, \left\{ \begin{matrix} 0 \\ -3 \\ 2 \\ 1 \end{matrix} \right\}, \left\{ \begin{matrix} 2 \\ 3 \\ 3 \\ 1 \end{matrix} \right\}, \left\{ \begin{matrix} 2 \\ 3 \\ 1 \\ 0 \end{matrix} \right\} \right\}$

Tabelle 5: Vier der Acht Geraden, die man durch die Transformationen $O_{\hat{a}}$ aus l_1 erhält.

6.2 Unterräume von \mathcal{P}_4

Im Folgenden wird ein Auszug der gefundenen Transformationen für die Primzahl $p = 7$ in den Ebenen $x_3 = 0, \pm 2$ und für $p = 11$ in den Ebenen $X_3 = \pm 3, \pm 5$ angegeben. Die Matrizen in den Tabellen 6 und 7 sind dabei nur der linke obere Block G , also

$$G = \begin{pmatrix} g_{00} & g_{01} & g_{02} \\ g_{10} & g_{11} & g_{12} \\ g_{20} & g_{21} & g_{22} \end{pmatrix}$$

und

$$T = \begin{pmatrix} G & \vec{0} \\ \vec{0}^t & 1 \end{pmatrix}.$$

Die restlichen Transformationen erhält man, indem die zweite Zeile einer Matrix aus den Tabellen 6, 7 mit -1 multipliziert wird.

$x_3 = 0$	$p = 7$ $x_3 = 2$	$x_3 = -2$
$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & \pm 1 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \\ \pm 2 & \pm 1 & \mp 2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \\ \pm 2 & \mp 1 & \pm 2 \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \pm 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 \\ 1 & -2 & 2 \\ \pm 2 & \pm 2 & \pm 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ -2 & 2 & 1 \\ \pm 1 & \pm 2 & \pm 2 \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & \pm 2 & \mp 2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 \\ 2 & 1 & -2 \\ \pm 1 & 0 & \pm 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ -2 & 1 & -2 \\ \mp 1 & 0 & \pm 1 \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 2 \\ 0 & \pm 2 & \pm 2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \\ \pm 1 & \mp 2 & \pm 2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 2 & -2 & -1 \\ \mp 1 & \mp 2 & \pm 2 \end{pmatrix}$

Tabelle 6: Gefundene Matrizen für die Ebenen $x_3 = 0, \pm 2$ für $p = 7$

$$\begin{array}{c}
p = 11 \\
\hline
\begin{array}{c}
x_3 = 3 \\
\left(\begin{array}{ccc} 4 & 4 & 4 \\ 1 & 3 & -4 \\ \pm 3 & \pm 1 & \mp 4 \end{array} \right) \\
\left(\begin{array}{ccc} 4 & 4 & 4 \\ 1 & -4 & 3 \\ \mp 3 & \mp 4 & \pm 1 \end{array} \right) \\
\left(\begin{array}{ccc} 4 & 4 & 4 \\ 4 & -3 & 1 \\ \pm 4 & \mp 1 & \mp 3 \end{array} \right) \\
\left(\begin{array}{ccc} 4 & 4 & 4 \\ 4 & -1 & -3 \\ \pm 4 & \mp 3 & \mp 1 \end{array} \right) \\
\left(\begin{array}{ccc} 4 & 4 & 4 \\ 3 & 1 & -4 \\ \pm 1 & \pm 3 & \mp 4 \end{array} \right) \\
\left(\begin{array}{ccc} 4 & 4 & 4 \\ 3 & -4 & 1 \\ \mp 1 & \pm 4 & \mp 3 \end{array} \right)
\end{array}
\quad
\begin{array}{c}
x_3 = -3 \\
\left(\begin{array}{ccc} 4 & -4 & -4 \\ 1 & -3 & 4 \\ \pm 3 & \mp 1 & \pm 4 \end{array} \right) \\
\left(\begin{array}{ccc} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 4 & -3 \\ \pm 3 & \pm 4 & \mp 1 \end{array} \right) \\
\left(\begin{array}{ccc} 4 & -4 & -4 \\ 4 & 3 & 1 \\ \pm 4 & \pm 1 & \pm 3 \end{array} \right) \\
\left(\begin{array}{ccc} 4 & -4 & -4 \\ 4 & 1 & 3 \\ \pm 4 & \pm 3 & \pm 1 \end{array} \right) \\
\left(\begin{array}{ccc} 4 & -4 & -4 \\ 3 & -1 & 4 \\ \pm 1 & \mp 3 & \pm 4 \end{array} \right) \\
\left(\begin{array}{ccc} 4 & -4 & -4 \\ 3 & -1 & 4 \\ \pm 1 & \mp 3 & \pm 4 \end{array} \right)
\end{array}
\quad
\begin{array}{c}
x_3 = 5 \\
\left(\begin{array}{ccc} 5 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 5 \\ \pm 1 & \pm 5 & \pm 1 \end{array} \right) \\
\left(\begin{array}{ccc} 5 & 1 & 1 \\ 1 & 5 & 1 \\ \pm 1 & \pm 1 & \pm 5 \end{array} \right) \\
\left(\begin{array}{ccc} 5 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ \pm 3 & \pm 2 & \pm 5 \end{array} \right) \\
\left(\begin{array}{ccc} 5 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ \pm 3 & \pm 5 & \pm 2 \end{array} \right) \\
\left(\begin{array}{ccc} 5 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 5 \\ \pm 2 & 0 & \pm 1 \end{array} \right) \\
\left(\begin{array}{ccc} 5 & 1 & 1 \\ 3 & 5 & 2 \\ \pm 2 & \pm 1 & 0 \end{array} \right)
\end{array}
\quad
\begin{array}{c}
x_3 = -5 \\
\left(\begin{array}{ccc} 5 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 5 \\ \pm 1 & \mp 5 & \mp 1 \end{array} \right) \\
\left(\begin{array}{ccc} 5 & -1 & -1 \\ 1 & -5 & -1 \\ \pm 1 & \mp 1 & \mp 5 \end{array} \right) \\
\left(\begin{array}{ccc} 5 & -1 & -1 \\ 2 & 0 & -1 \\ \pm 3 & \mp 2 & \mp 5 \end{array} \right) \\
\left(\begin{array}{ccc} 5 & -1 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \\ \mp 3 & \pm 5 & \pm 2 \end{array} \right) \\
\left(\begin{array}{ccc} 5 & -1 & -1 \\ 3 & -2 & -5 \\ \pm 2 & 0 & \pm 1 \end{array} \right) \\
\left(\begin{array}{ccc} 5 & -1 & -1 \\ 3 & -5 & -2 \\ \mp 2 & \pm 1 & 0 \end{array} \right)
\end{array}
\end{array}$$

Tabelle 7: Gefundene Matrizen für die Ebenen $x_3 = \pm 3, \pm 5$ für $p = 11$

7 Literaturverzeichnis

- [1] Klaus Mecke. Biquadrics configure finite projective geometry into a quantum space-time. *EPL (Europhysics Letters)*, 120(1):10007, oct 2017.
- [2] J.W.P. Hirschfeld. *General Galois Geometries*. Springer-Verlag, 2016.
- [3] J.W.P. Hirschfeld. *Projektiv Geometries over Finite Fields*. Oxford University Press, 1979.
- [4] Stephan Foldes. The Lorentz group and its finite field analogues: local isomorphism and approximation. *arxiv:0805.1224v2*, 2008.
- [5] Alexander Laska. Promotion in Bearbeitung. 2019.

Erklärung zur Hausarbeit gemäß 29 (Abs.6) LPOI

Hiermit erkläre ich, dass die vorliegende Hausarbeit von mir selbstständig verfasst wurde und dass keine anderen als die angegebenen Hilfsmittel benutzt wurden. Die Stellen der Arbeit, die anderen Werken dem Wortlaut oder Sinn nach entnommen sind, sind in jedem einzelnen Fall unter Angabe der Quelle als Entlehnung kenntlich gemacht.

Diese Erklärung erstreckt sich auch auf etwa in der Arbeit enthaltene Zeichnungen, Kartenskizzen und bildliche Darstellungen.

Ort, Datum

Unterschrift